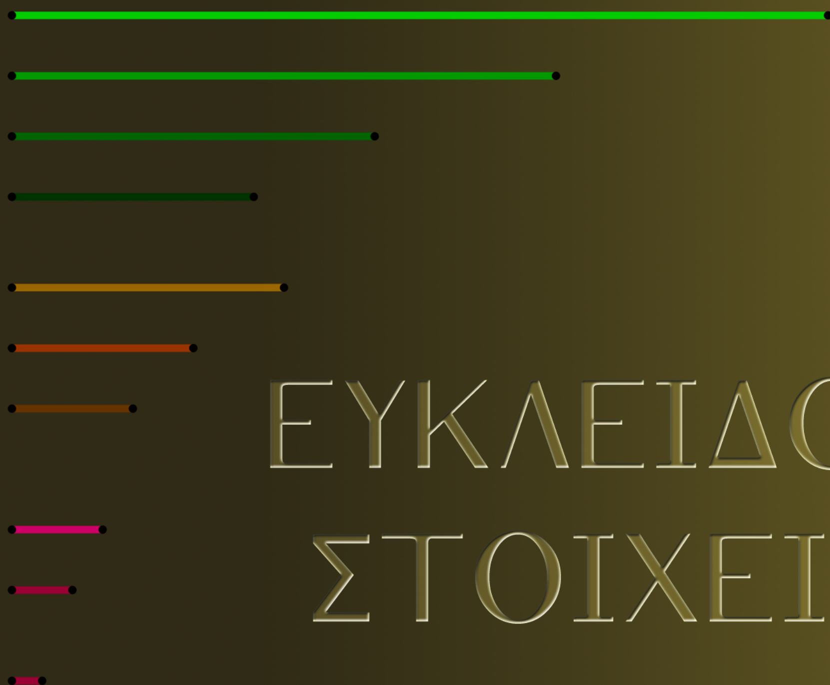
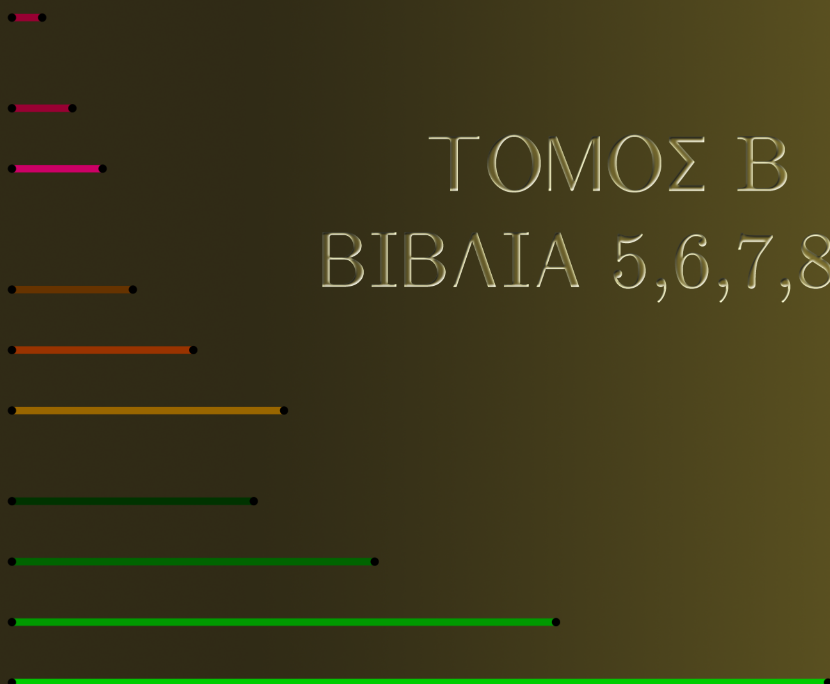


ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ



ΤΟΜΟΣ Β

ΒΙΒΛΙΑ 5,6,7,8,9

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τ Ο Μ Ο Σ   Β
Β Ι Β Λ Ι Α   5, 6, 7, 8, 9

Αρχαίο κείμενο Ε.Σ.ΣΤΑΜΑΤΗ
Υπό
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ
(Αθήνα, Οκτώβριος 2016)

ISBN 978-618-83039-1-1
ISBN 978-618-83039-4-2 (set)
Εκδότης Νικόλαος Κεχρής

Πρόλογος

Αν υπάρχει κάποιος σκοπός για τον οποίο γράφω αυτόν τον πρόλογο, αυτός είναι κυρίως για να αποτυπώσω κάποιες από τις σκέψεις μου κατά τη διάρκεια επεξεργασίας αυτού του τόμου των Στοιχείων. Αυτές ξεκινούν από την αναφορά του περιστατικού που περιγράφεται στο Ανθολόγιο του Στοβαίου:

Παρ' Εὐκλείδη τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδη: "Τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μαθόντι;" καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας "Δός", ἔφη, "αὐτῷ τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν".

Αναλογιζόμενος το συγκεκριμένο περιστατικό, νοιώθω την περιφρόνηση του Ευκλείδη για τα κίνητρα του εν λόγω μαθητή. Ο Ευκλείδης δεν απευθύνει την απάντησή του στον μαθητή αλλά στον βοηθό του. Είναι μια αντιπαράθεση Γνώσης-Χρηματικής Δύναμης όπως αποτυπώνεται στα παραπάνω πρόσωπα. Σίγουρα αυτές οι δύο ιδέες, έννοιες, αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και μπορούμε να δούμε σχέσεις παίρνοντας οριακές καταστάσεις. Υπέρμετρη Γνώση χωρίς καμία Χρηματική Δύναμη είναι σχεδόν άχρηστη και αντίστροφα, υπέρμετρη Χρηματική Δύναμη χωρίς καμία Γνώση είναι σχεδόν καταστροφική. Αυτό όμως που θα ήθελα να επισημάνω, είναι ότι οι δύο αυτές ιδέες διαφοροποιούν τους ανθρώπους ή καλύτερα τους διαμερίζουν και προσδιορίζουν με σαφήνεια για το ποιος μπορεί να θεωρείται Μαθηματικός (ή Γεωμέτρης). Μαθηματικός είναι εκείνος ο οποίος αναζητεί την Αλήθεια· βασισμένος σε Όρους και Αιτήματα για να επιδείξει την αφετηρία του, προσπαθεί να διατυπώσει αδιαμφισβήτητες Προτάσεις. Νομίζω ότι ο Ευκλείδης προσδιόρισε τα όρια αυτά με τον καλύτερο τρόπο και για το λόγο αυτό η διδασκαλία του θα παραμείνει ανεξίτηλη.

Χρήσιμες Πληροφορίες.

Στην πλειοψηφία τους όλα τα ευθύγραμμα τμήματα (μεγέθη) είναι μετρημένα. Αυτό σημαίνει ότι σε μια συγκεκριμένη πρόταση, τα εικονιζόμενα στο σχήμα ευθύγραμμα τμήματα έχουν μήκη (υπό κάποιο συντελεστή κλίμακας), που αντιστοιχούν στους αριθμούς που επιλέχθηκαν σαν παράδειγμα για την πρόταση αυτή.

Αυτό έγινε με γνώμονα να διευκολύνεται η αντίληψη του αναγνώστη στη σύγκριση μεγεθών ώστε να φθάνει με σαφήνεια στην κατανόηση της απόδειξης μιας πρότασης. Για τον ίδιο σκοπό,

σε σχήματα πολλών προτάσεων επίσης, έχω παραθέσει κάποιο σύγχρονο συμβολισμό ή τους αριθμούς που επιλέχτηκαν για την απεικόνιση.

Τέλος θέλω να επισημάνω ότι για κάποιες προτάσεις υπάρχει κίνδυνος παρερμηνείας. Αυτό οφείλεται κυρίως, στο ότι έννοιες (οντότητες) όπως "αριθμός", "λόγος", "μέγεθος", έχουν με το χρόνο διαφοροποιηθεί. Αν και τα δικά μου πρόσθετα στοιχεία στα σχήματα είναι ελάχιστα, θέλω να πιστεύω ότι έως εδώ δεν έχω υποπέσει σε κάποια πλάνη.

Αθήνα, Οκτώβριος 2016
Νικόλαος Κεχρής

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 5

Ὅροι

α′. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β′. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ′. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.

δ′. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε′. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καί τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾿ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ς′. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλείσθω.

ζ′. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

η′. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

θ′. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ι′. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ια′. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιβ′. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιγ′. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιδ′. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιε′. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ις′. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

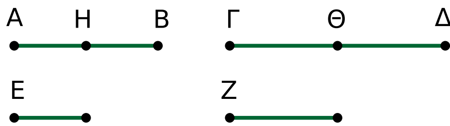
ιζ′. Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρωνκαθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιη′. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

α′.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ** ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν **Ε**, **Ζ** ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω[1], ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ **ΑΒ** τοῦ **Ε**, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ** τῶν **Ε**, **Ζ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΒ** τοῦ **Ε** καὶ τὸ **ΓΔ** τοῦ **Ζ**, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΑΒ** μεγέθη ἴσα τῷ **Ε**, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ **ΓΔ** ἴσα τῷ **Ζ**.

διῃρήσθω τὸ μὲν **ΑΒ** εἰς τὰ τῷ **Ε** μεγέθη ἴσα τὰ **ΑΗ**, **ΗΒ**, τὸ δὲ **ΓΔ** εἰς τὰ τῷ **Ζ** ἴσα τὰ **ΓΘ**, **ΘΔ**· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΑΗ**, **ΗΒ** τῷ πλήθει τῶν **ΓΘ**, **ΘΔ**. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν **ΑΗ** τῷ **Ε**, τὸ δὲ **ΓΘ** τῷ **Ζ**, ἴσον ἄρα τὸ **ΑΗ** τῷ **Ε**, καὶ τὰ **ΑΗ**, **ΓΘ** τοῖς **Ε**, **Ζ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΗΒ** τῷ **Ε**, καὶ τὰ **ΗΒ**, **ΘΔ** τοῖς **Ε**, **Ζ**·

ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΑΒ** ἴσα τῷ **Ε**, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς **ΑΒ**, **ΓΔ** ἴσα

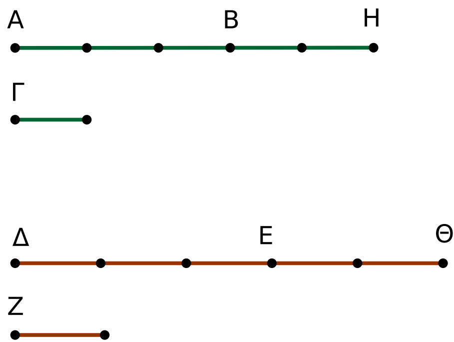
[1] Με σύγχρονο συμβολισμό διατυπώνεται: $\mathbf{\kappa}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{\kappa}\cdot\mathbf{Z}+\cdots=\mathbf{\kappa}\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{Z}+\cdots)$

τοῖς **Ε**, **Ζ**· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒ** τοῦ **Ε**, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ** τῶν **Ε**, **Ζ**. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ **ΑΒ** δευτέρου τοῦ **Γ** ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ **ΔΕ** τετάρτου τοῦ **Ζ**, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ **ΒΗ** δευτέρου τοῦ **Γ** ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ **ΕΘ** τετάρτου τοῦ **Ζ**· λέγω[1], ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ **ΑΗ** δευτέρου τοῦ **Γ** ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ **ΔΘ** τετάρτου τοῦ **Ζ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΒ** τοῦ **Γ** καὶ τὸ **ΔΕ** τοῦ **Ζ**, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΑΒ** ἴσα τῷ **Γ**, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ **ΔΕ** ἴσα τῷ **Ζ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ **ΒΗ** ἴσα τῷ **Γ**, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ **ΕΘ** ἴσα τῷ **Ζ**·

ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ **ΑΗ** ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ **ΔΘ** ἴσα τῷ **Ζ**· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΗ** τοῦ **Γ**, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ **ΔΘ** τοῦ **Ζ**.

καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ **ΑΗ** δευτέρου τοῦ **Γ** ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ **ΔΘ** τετάρτου τοῦ **Ζ**.

---

[1] Με σύγχρονο συμβολισμό διατυπώνεται:

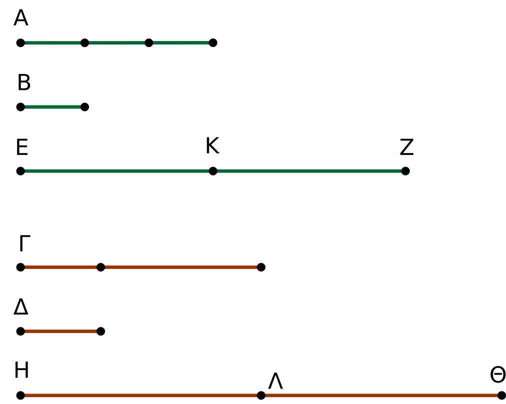
$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{AB}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{\Gamma} & \mathbf{BH}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{\Gamma}\\ \mathbf{\Delta E}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{Z} & \mathbf{E\Theta}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{Z}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{\Gamma}}=\frac{\mathbf{\Delta\Theta}}{\mathbf{Z}}=\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\lambda}$$

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι᾽ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ **Α** δευτέρου τοῦ **Β** ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ **Γ** τετάρτου τοῦ **Δ**, καὶ εἰλήφθω τῶν **Α**, **Γ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **ΕΖ**, **ΗΘ**· λέγω[1], ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΕΖ** τοῦ **Β** καὶ τὸ **ΗΘ** τοῦ **Δ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΕΖ** τοῦ **Α** καὶ τὸ **ΗΘ** τοῦ **Γ**, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΕΖ** ἴσα τῷ **Α**, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ **ΗΘ** ἴσα τῷ **Γ**. διῃρήσθω τὸ μὲν **ΕΖ** εἰς τὰ τῷ **Α** μεγέθη ἴσα τὰ **ΕΚ**, **ΚΖ**, τὸ δὲ **ΗΘ** εἰς τὰ τῷ **Γ** ἴσα τὰ **ΗΛ**, **ΛΘ**·

ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΕΚ**, **ΚΖ** τῷ πλήθει τῶν **ΗΛ**, **ΛΘ**. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **Α** τοῦ **Β** καὶ τὸ **Γ** τοῦ **Δ**, ἴσον δὲ τὸ μὲν **ΕΚ** τῷ **Α**, τὸ δὲ **ΗΛ** τῷ **Γ**, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΕΚ** τοῦ **Β** καὶ τὸ **ΗΛ** τοῦ **Δ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΚΖ** τοῦ **Β** καὶ τὸ **ΛΘ** τοῦ **Δ**.

ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ **ΕΚ** δευτέρου τοῦ **Β** ἴσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ **ΗΛ** τετάρτου τοῦ **Δ**, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ **ΚΖ** δευτέρου τοῦ **Β**

---

[1] Με σύγχρονο συμβολισμό διατυπώνεται:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{E}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{\Gamma}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{\Delta} & \mathbf{H}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{\Gamma} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}}=\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{\Delta}}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

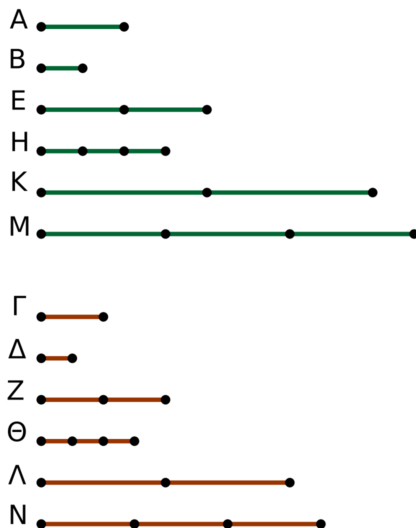
ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ **ΛΘ** τετάρτου τοῦ **Δ**, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ **ΕΖ** δευτέρου τοῦ **Β** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ **ΗΘ** τετάρτου τοῦ **Δ**.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ δι᾽ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ **Α** πρὸς δεύτερον τὸ **Β** τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ **Γ** πρὸς τέταρτον τὸ **Δ**, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν **Α**, **Γ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Ε**, **Ζ**, τῶν δὲ **Β**, **Δ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**· λέγω[1], ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Η**, οὕτως τὸ **Ζ** πρὸς τὸ **Θ**.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν **Ε**, **Ζ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Κ**, **Λ**, τῶν δὲ **Η**, **Θ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Μ**, **Ν**. [Καὶ] ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν **Ε** τοῦ **Α**, τὸ δὲ **Ζ** τοῦ **Γ**, καὶ εἴληπται τῶν **Ε**, **Ζ** ἴσάκις πολλαπλάσια τὰ **Κ**, **Λ**, ἴσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **Κ** τοῦ **Α** καὶ τὸ **Λ** τοῦ **Γ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **Μ** τοῦ **Β** καὶ τὸ **Ν** τοῦ **Δ**. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, καὶ εἴληπται τῶν μὲν **Α**, **Γ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Κ**, **Λ**, τῶν δὲ **Β**, **Δ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Μ**, **Ν**, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Κ** τοῦ **Μ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Λ** τοῦ **Ν**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν **Κ**, **Λ** τῶν **Ε**, **Ζ** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ **Μ**, **Ν** τῶν **Η**, **Θ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν,

[1] Με σύγχρονο συμβολισμό : $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \rightarrow \frac{\kappa \cdot A}{\lambda \cdot B} = \frac{\kappa \cdot \Gamma}{\lambda \cdot \Delta} \rightarrow \frac{E}{H} = \frac{Z}{\Theta}$

ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Η**, οὕτως τὸ **Ζ** πρὸς τὸ **Θ**.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Μέγεθος γὰρ τὸ **ΑΒ** μεγέθους τοῦ **ΓΔ** ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ **ΑΕ** ἀφαιρεθέντος τοῦ **ΓΖ**· λέγω[1], ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ **ΕΒ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ **ΑΒ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ **ΕΒ** τοῦ **ΓΗ**. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΕΒ** τοῦ **ΗΓ**, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΑΒ** τοῦ **ΗΖ**.



κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ**. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΒ** ἑκατέρου τῶν **ΗΖ**, **ΓΔ**· ἴσον ἄρα τὸ **ΗΖ** τῷ **ΓΔ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ **ΓΖ**· λοιπὸν ἄρα τὸ **ΗΓ** λοιπῷ τῷ **ΖΔ** ἴσον ἐστίν.

καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΕΒ** τοῦ **ΗΓ**, ἴσον δὲ τὸ **ΗΓ** τῷ **ΔΖ**, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΕΒ** τοῦ **ΖΔ**. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ**· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΕΒ** τοῦ **ΖΔ** καὶ τὸ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ**. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ **ΕΒ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ **ΑΒ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**.

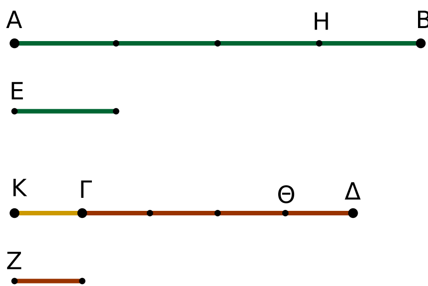
Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[1] Με σύγχρονο συμβολισμό : $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{AE}}{\Gamma\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{AB}-\mathrm{AE}}{\Gamma\Delta-\Gamma\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{Z}\Delta}$

ϛʹ.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ** δύο μεγεθῶν τῶν **Ε**, **Ζ** ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ **ΑΗ**, **ΓΘ** τῶν αὐτῶν τῶν **Ε**, **Ζ** ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ **ΗΒ**, **ΘΔ** τοῖς **Ε**, **Ζ** ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.



Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ **ΗΒ** τῷ **Ε** ἴσον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ **ΘΔ** τῷ **Ζ** ἴσον ἐστίν.

Κείσθω γὰρ τῷ **Ζ** ἴσον τὸ **ΓΚ**. ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΗ** τοῦ **Ε** καὶ τὸ **ΓΘ** τοῦ **Ζ**, ἴσον δὲ τὸ μὲν **ΗΒ** τῷ **Ε**, τὸ δὲ **ΚΓ** τῷ **Ζ**, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΒ** τοῦ **Ε** καὶ τὸ **ΚΘ** τοῦ **Ζ**. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ **ΑΒ** τοῦ **Ε** καὶ τὸ **ΓΔ** τοῦ **Ζ**· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΚΘ** τοῦ **Ζ** καὶ τὸ **ΓΔ** τοῦ **Ζ**.

ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν **ΚΘ**, **ΓΔ** τοῦ **Ζ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΚΘ** τῷ **ΓΔ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ **ΓΘ**· λοιπὸν ἄρα τὸ **ΚΓ** λοιπῷ τῷ **ΘΔ** ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ **Ζ** τῷ **ΚΓ** ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ **ΘΔ** ἄρα τῷ **Ζ** ἴσον ἐστίν.

ὥστε εἰ τὸ **ΗΒ** τῷ **Ε** ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ **ΘΔ** ἴσον ἔσται τῷ **Ζ**. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι, κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ **ΗΒ** τοῦ **Ε**, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ **ΘΔ** τοῦ **Ζ**.

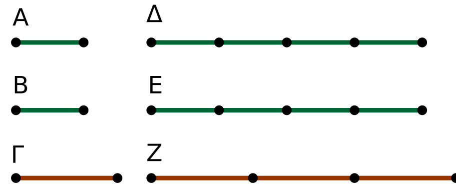
Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ **Α**, **Β**, ἄλλο δέ τι, ὃ ἔτυχεν, μέγεθος τὸ **Γ**· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** πρὸς τὸ **Γ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ **Γ** πρὸς ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β**.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν **Α**, **Β** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Δ**, **Ε**, τοῦ δὲ **Γ** ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον τὸ **Ζ**.



Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **Δ** τοῦ **Α** καὶ τὸ **Ε** τοῦ **Β**, ἴσον δὲ τὸ **Α** τῷ **Β**, ἴσον ἄρα καὶ τὸ **Δ** τῷ **Ε**. ἄλλο δέ, ὅ ἔτυχεν, τὸ **Ζ**. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Δ** τοῦ **Ζ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Ε** τοῦ **Ζ**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον.

καί ἐστι τὰ μὲν **Δ**, **Ε** τῶν **Α**, **Β** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ **Ζ** τοῦ **Γ** ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**. Λέγω [δή], ὅτι καὶ τὸ **Γ** πρὸς ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **Δ** τῷ **Ε**· ἄλλο δέ τι τὸ **Ζ**· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Ζ** τοῦ **Δ**, ὑπερέχει καὶ τοῦ **Ε**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὸ μὲν **Ζ** τοῦ **Γ** πολλαπλάσιον, τὰ δὲ **Δ**, **Ε** τῶν **Α**, **Β** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Α**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β**.

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

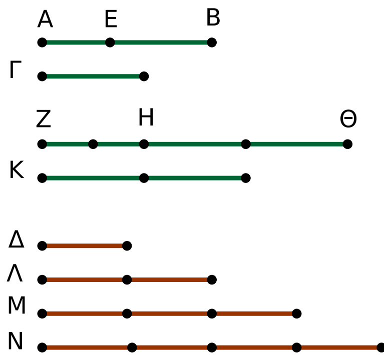
Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η′.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ **ΑΒ**, **Γ**, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ **ΑΒ**, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **Δ** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, καὶ τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Γ** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ **ΑΒ**. Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ **ΑΒ** τοῦ **Γ**, κείσθω τῷ **Γ** ἴσον τὸ **ΒΕ**· τὸ δὴ ἔλασσον τῶν **ΑΕ**, **ΕΒ** πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ **Δ** μεῖζον.

ἔστω πρότερον τὸ **ΑΕ** ἔλαττον τοῦ **ΕΒ**, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ **ΑΕ**, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ **ΖΗ** μεῖζον ὂν τοῦ **Δ**, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ **ΖΗ** τοῦ **ΑΕ**, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν **ΗΘ** τοῦ **ΕΒ** τὸ δὲ **Κ** τοῦ **Γ**·



καὶ εἰλήφθω τοῦ **Δ** διπλάσιον μὲν τὸ **Λ**, τριπλάσιον δὲ τὸ **Μ**, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ **Δ**, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ **Κ**. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ **Ν** τετραπλάσιον μὲν τοῦ **Δ**, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ **Κ**.

Ἐπεὶ οὖν τὸ **Κ** τοῦ **Ν** πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ **Κ** ἄρα τοῦ **Μ** οὔκ ἐστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΖΗ** τοῦ **ΑΕ** καὶ τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΕΒ**, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΖΗ** τοῦ **ΑΕ** καὶ τὸ **ΖΘ** τοῦ **ΑΒ**.

ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ **ΖΗ** τοῦ **ΑΕ** καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Γ**· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΖΘ** τοῦ **ΑΒ** καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Γ**. τὰ **ΖΘ**, **Κ** ἄρα τῶν **ΑΒ**, **Γ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια.

πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΕΒ** καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Γ**, ἴσον δὲ τὸ **ΕΒ** τῷ **Γ**, ἴσον ἄρα καὶ τὸ **ΗΘ** τῷ **Κ**. τὸ δὲ **Κ** τοῦ **Μ** οὔκ ἐστιν ἔλαττον· οὐδ᾽ ἄρα τὸ **ΗΘ** τοῦ **Μ** ἔλαττόν ἐστιν. μεῖζον δὲ τὸ **ΖΗ** τοῦ **Δ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΖΘ** συναμφοτέρων τῶν **Δ**, **Μ** μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ **Δ**, **Μ** τῷ **Ν** ἐστιν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ **Μ** τοῦ **Δ** τριπλάσιόν ἐστιν, συναμφότερα δὲ τὰ **Μ**, **Δ** τοῦ **Δ** ἐστι τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ **Ν** τοῦ **Δ** τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ **Μ**, **Δ** τῷ **Ν** ἴσα ἐστίν.

ἀλλὰ τὸ **ΖΘ** τῶν **Μ**, **Δ** μεῖζόν ἐστιν· τὸ **ΖΘ** ἄρα τοῦ **Ν** ὑπερέχει· τὸ δὲ **Κ** τοῦ **Ν** οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὰ μὲν **ΖΘ**, **Κ** τῶν **ΑΒ**, **Γ** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ **Ν** τοῦ **Δ** ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον· τὸ **ΑΒ** ἄρα πρὸς τὸ **Δ** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**. Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Γ** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Δ** πρὸς τὸ **ΑΒ**.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν **Ν** τοῦ **Κ** ὑπερέχει, τὸ δὲ **Ν** τοῦ **ΖΘ** οὐχ ὑπερέχει. καί ἐστι τὸ μὲν **Ν** τοῦ **Δ** πολλαπλάσιον, τὰ δὲ **ΖΘ**, **Κ** τῶν **ΑΒ**, **Γ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια·

τὸ **Δ** ἄρα πρὸς τὸ **Γ** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Δ** πρὸς τὸ **ΑΒ**. Ἀλλὰ δὴ τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΕΒ** μεῖζον ἔστω. τὸ δὴ ἔλαττον τὸ **ΕΒ** πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ **Δ** μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ **ΗΘ** πολλαπλάσιον μὲν τοῦ **ΕΒ**, μεῖζον δὲ τοῦ **Δ**· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΕΒ**, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν **ΖΗ** τοῦ **ΑΕ**, τὸ δὲ **Κ** τοῦ **Γ**.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ **ΖΘ**, **Κ** τῶν **ΑΒ**, **Γ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ **Ν** πολλαπλάσιον μὲν τοῦ **Δ**, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ

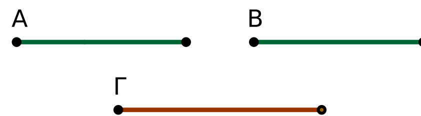
ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ **ΖΗ** τοῦ **Μ** οὔκ ἐστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ **ΗΘ** τοῦ **Δ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΖΘ** τῶν **Δ**, **Μ**, τουτέστι τοῦ **Ν**, ὑπερέχει. τὸ δὲ **Κ** τοῦ **Ν** οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ **ΖΗ** μεῖζον ὂν τοῦ **ΗΘ**, τουτέστι τοῦ **Κ**, τοῦ **Ν** οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ′.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λὸγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** πρὸς τὸ **Γ** τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**. Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** πρὸς τὸ **Γ** τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**.



Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ **Γ** πρὸς ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**. Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ **Γ** πρὸς ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**.

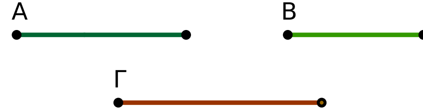
Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι′.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ **Α** πρὸς τὸ **Γ** μείζονα λόγον ἤπερ τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ **Α** τοῦ **Β**. Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β** ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὔκ ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**· ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν **Α**, **Β** πρὸς τὸ **Γ** τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ **Α** τοῦ **Β**· τὸ **Α** γὰρ ἂν πρὸς τὸ **Γ** ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ **Α** τοῦ **Β**. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ **Α** τοῦ **Β**.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β** μείζονα λόγον ἤπερ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Α**· λέγω, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ **Β** τοῦ **Α**. Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὔκ ἐστι τὸ **Β** τῷ **Α**· τὸ **Γ** γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ **Β** τοῦ **Α**· τὸ **Γ** γὰρ ἂν πρὸς τὸ **Β** ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ **Α**. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ **Β** τοῦ **Α**. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ **Β** τοῦ **Α**.

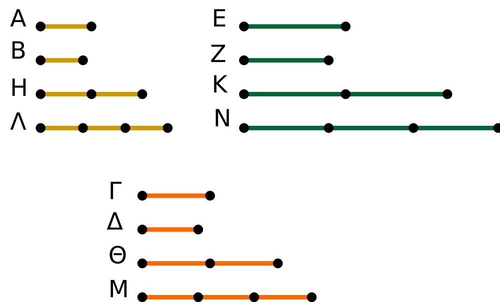


Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, ὡς δὲ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν **Α**, **Γ**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, **Κ**, τῶν δὲ **Β**, **Δ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Λ**, **Μ**, **Ν**. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, καὶ εἴληπται τῶν μὲν **Α**, **Γ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, τῶν δὲ **Β**, **Δ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Λ**, **Μ**, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Η** τοῦ **Λ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Θ** τοῦ **Μ**, καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει.

πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, καὶ εἴληπται τῶν **Γ**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Θ**, **Κ**, τῶν δὲ **Δ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Μ**, **Ν**, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Θ** τοῦ **Μ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Ν**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλλατον, ἔλαττον. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ **Θ** τοῦ **Μ**, ὑπερεῖχε καὶ τὸ **Η** τοῦ **Λ**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε

καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ **Η** τοῦ **Λ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Ν**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν **Η**, **Κ** τῶν **Α**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ **Λ**, **Ν** τῶν **Β**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**.

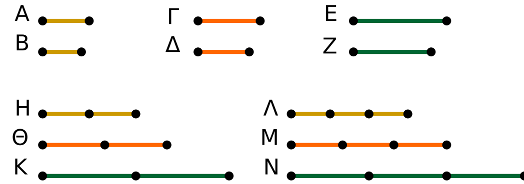
Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβʹ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **Ζ**, ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, καὶ τὸ **Ε** πρὸς το **Ζ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὰ **Α**, **Γ**, **Ε** πρὸς τὰ **Β**, **Δ**, **Ζ**.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν **Α**, **Γ**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, **Κ**, τῶν δὲ **Β**, **Δ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Λ**, **Μ**, **Ν**.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, καὶ τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, καὶ εἴληπται τῶν μὲν **Α**, **Γ**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, **Κ** τῶν δὲ **Β**, **Δ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Λ**, **Μ**, **Ν**, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Η** τοῦ **Λ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Θ** τοῦ **Μ**, καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Ν**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ **Η** τοῦ **Λ**, ὑπερέχει καὶ τὰ **Η**, **Θ**, **Κ** τῶν **Λ**, **Μ**, **Ν**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσα, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττονα. καί ἐστι τὸ μὲν **Η** καὶ τὰ **Η**, **Θ**, **Κ** τοῦ **Α** καὶ τῶν **Α**, **Γ**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια, ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

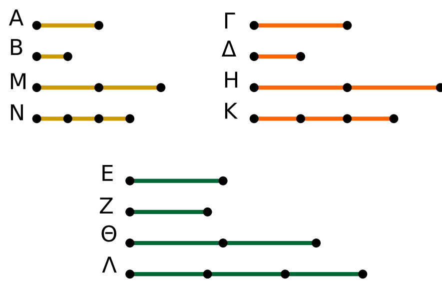
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **Λ** καὶ τὰ **Λ**, **Μ**, **Ν** τοῦ **Β** καὶ τῶν **Β**, **Δ**, **Ζ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὰ **Α**, **Γ**, **Ε** πρὸς τὰ **Β**, **Δ**, **Ζ**.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγʹ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ **Α** πρὸς δεύτερον τὸ **Β** τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ **Γ** πρὸς τέταρτον τὸ **Δ**, τρίτον δὲ τὸ **Γ** πρὸς τέταρτον τὸ **Δ** μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ πέμπτον τὸ **Ε** πρὸς ἕκτον τὸ **Ζ**. λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ **Α** πρὸς δεύτερον τὸ **Β** μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ **Ε** πρὸς ἕκτον τὸ **Ζ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἔστι τινὰ τῶν μὲν **Γ**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ **Δ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ **Γ** πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ **Δ** πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ **Ε** πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ **Ζ** πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει, εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν **Γ**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, τῶν δὲ **Δ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Κ**, **Λ**, ὥστε τὸ μὲν **Η** τοῦ **Κ** ὑπερέχειν, τὸ δὲ **Θ** τοῦ **Λ** μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ **Η** τοῦ **Γ**, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ **Μ** τοῦ **Α**, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ **Κ** τοῦ **Δ**, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ **Ν** τοῦ **Β**.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, καὶ εἴληπται τῶν μὲν **Α**, **Γ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Μ**, **Η**, τῶν δὲ **Β**, **Δ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Ν**, **Κ**, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Μ** τοῦ **Ν**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Η** τοῦ **Κ**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλλατον.

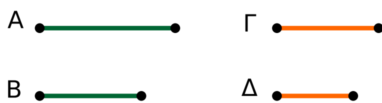
ὑπερέχει δὲ τὸ **Η** τοῦ **Κ**· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ **Μ** τοῦ **Ν**. τὸ δὲ **Θ** τοῦ **Λ** οὐχ ὑπερέχει· καί ἐστι τὰ μὲν **Μ**, **Θ** τῶν **Α**, **Ε** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ **Ν**, **Λ** τῶν **Β**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα **Α** πρὸς τὸ **Β** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἢ πέμπτον πρὸς ἕκτον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Πρῶτον γὰρ τὸ **Α** πρὸς δεύτερον τὸ **Β** αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ **Γ** πρὸς τέταρτον τὸ **Δ**, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ **Α** τοῦ **Γ**· λέγω, ὅτι καὶ τὸ **Β** τοῦ **Δ** μεῖζόν ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ **Α** τοῦ **Γ** μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, [μέγεθος] τὸ **Β**, τὸ **Α** ἄρα πρὸς τὸ **Β** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β**. ὡς δὲ τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**· καὶ τὸ **Γ** ἄρα πρὸς τὸ **Δ** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β**. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα τὸ **Δ** τοῦ **Β**· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ **Β** τοῦ **Δ**.

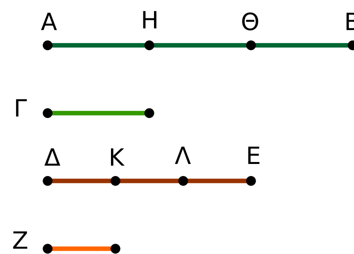
Ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ **Α** τῷ **Γ**, ἴσον ἔσται καὶ τὸ **Β** τῷ **Δ**, κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ **Β** τοῦ **Δ**.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιεʹ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ **ΑΒ** τοῦ **Γ** καὶ το **ΔΕ** τοῦ **Ζ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Ζ**, οὕτως τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΔΕ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΑΒ** τοῦ **Γ** καὶ τὸ **ΔΕ** τοῦ **Ζ**, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΑΒ** μεγέθη ἴσα τῷ **Γ**, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ **ΔΕ** ἴσα τῷ **Ζ**. διῃρήσθω τὸ μὲν **ΑΒ** εἰς τὰ τῷ **Γ** ἴσα τὰ **ΑΗ**, **ΗΘ**, **ΘΒ**, τὸ δὲ **ΔΕ** εἰς τὰ τῷ **Ζ** ἴσα τὰ **ΔΚ**, **ΚΛ**, **ΛΕ**· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΑΗ**, **ΗΘ**, **ΘΒ** τῷ πλήθει τῶν **ΔΚ**, **ΚΛ**, **ΛΕ**.

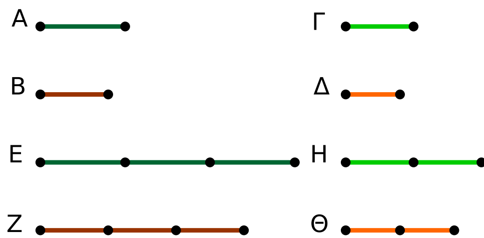
καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ **ΑΗ**, **ΗΘ**, **ΘΒ** ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ **ΔΚ**, **ΚΛ**, **ΛΕ** ἴσα ἀλλήλοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΗ** πρὸς τὸ **ΔΚ**, οὕτως τὸ **ΗΘ** πρὸς τὸ **ΚΛ**, καὶ τὸ **ΘΒ** πρὸς τὸ **ΛΕ**. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγουμένα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΗ** πρὸς τὸ **ΔΚ**, οὕτως τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΔΕ**. ἴσον δὲ τὸ μὲν **ΑΗ** τῷ **Γ**, τὸ δὲ **ΔΚ** τῷ **Ζ**· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Ζ** οὕτως τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΔΕ**.

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ [ἀνάλογον] ἔσται, ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Β** πρὸς τὸ **Δ**.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν **Α**, **Β** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Ε**, **Ζ**, τῶν δὲ **Γ**, **Δ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **Ε** τοῦ **Α** καὶ τὸ **Ζ** τοῦ **Β**, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**. ὡς δὲ τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**.

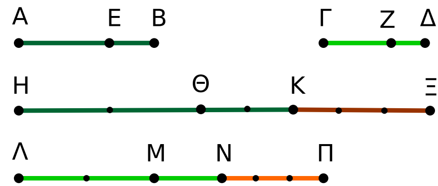
πάλιν, ἐπεὶ τὰ **Η**, **Θ** τῶν **Γ**, **Δ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, οὕτως τὸ **Η** πρὸς τὸ **Θ**. ὡς δὲ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Δ**, [οὕτως] τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, οὕτως τὸ **Η** πρὸς τὸ **Θ**. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **Ε** τοῦ **Η**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Ζ** τοῦ **Θ**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν **Ε**, **Ζ** τῶν **Α**, **Β** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ **Η**, **Θ** τῶν **Γ**, **Δ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Β** πρὸς τὸ **Δ**.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ **ΑΒ**, **ΒΕ**, **ΓΔ**, **ΔΖ**, ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ **ΔΖ**· λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ **ΑΕ** πρὸς τὸ **ΕΒ**, οὕτως τὸ **ΓΖ** πρὸς τὸ **ΔΖ**.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΓΖ**, **ΖΔ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **ΗΘ**, **ΘΚ**, **ΛΜ**, **ΜΝ**, τῶν δὲ **ΕΒ**, **ΖΔ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **ΚΞ**, **ΝΠ**.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΑΕ** καὶ τὸ **ΘΚ** τοῦ **ΕΒ**, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΑΕ** καὶ τὸ **ΗΚ** τοῦ **ΑΒ**. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΑΕ** καὶ τὸ **ΛΜ** τοῦ **ΓΖ**· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΗΚ** τοῦ **ΑΒ** καὶ τὸ **ΛΜ** τοῦ **ΓΖ**.

πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΛΜ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΜΝ** τοῦ **ΖΔ**, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΛΜ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΛΝ** τοῦ **ΓΔ**. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ **ΛΜ** τοῦ **ΓΖ** καὶ τὸ **ΗΚ** τοῦ **ΑΒ**· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ **ΗΚ** τοῦ **ΑΒ** καὶ τὸ **ΛΝ** τοῦ **ΓΔ**. τὰ **ΗΚ**, **ΛΝ** ἄρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια.

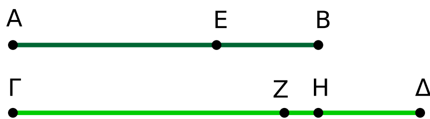
πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλασίον τὸ **ΘΚ** τοῦ **ΕΒ** καὶ τὸ **ΜΝ** τοῦ **ΖΔ**, ἔστι δὲ καὶ τὸ **ΚΞ** τοῦ **ΕΒ** ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ **ΝΠ** τοῦ **ΖΔ**, καὶ συντεθὲν τὸ **ΘΞ** τοῦ **ΕΒ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ **ΜΠ** τοῦ **ΖΔ**. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ **ΔΖ**, καὶ εἴληπται τῶν μὲν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **ΗΚ**, **ΛΝ**, τῶν δὲ **ΕΒ**, **ΖΔ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **ΘΞ**, **ΜΠ**, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ **ΗΚ** τοῦ **ΘΞ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **ΛΝ** τοῦ **ΜΠ**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον.

ὑπερεχέτω δὴ τὸ **ΗΚ** τοῦ **ΘΞ**, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ **ΘΚ** ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΚΞ**. ἀλλα εἰ ὑπερεῖχε τὸ **ΗΚ** τοῦ **ΘΞ** ὑπερεῖχε καὶ τὸ **ΛΝ** τοῦ **ΜΠ**· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ **ΛΝ** τοῦ **ΜΠ**, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ **ΜΝ** ὑπερέχει καὶ τὸ **ΛΜ** τοῦ **ΝΠ**· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΚΞ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **ΛΜ** τοῦ **ΝΠ**. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ **ΗΘ** τῷ **ΚΞ**, ἴσον ἔσται καὶ τὸ **ΛΜ** τῷ **ΝΠ**, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν **ΗΘ**, **ΛΜ** τῶν **ΑΕ**, **ΓΖ** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ **ΚΞ**, **ΝΠ** τῶν **ΕΒ**, **ΖΔ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΕ** πρὸς τὸ **ΕΒ**, οὕτως τὸ **ΓΖ** πρὸς τὸ **ΖΔ**. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη′.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον τὰ **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΓΖ**, **ΖΔ**, ὡς τὸ **ΑΕ** πρὸς τὸ **ΕΒ**, οὕτως τὸ **ΓΖ** πρὸς τὸ **ΖΔ**· λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ **ΖΔ**.



Εἰ γὰρ μή ἐστὶν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ **ΔΖ**, ἔσται ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΓΔ** ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΔΖ** ἢ πρὸς μεῖζον.

Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ **ΔΗ**. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ **ΔΗ**, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΕ** πρὸς τὸ **ΕΒ**, οὕτως τὸ **ΓΗ** πρὸς τὸ **ΗΔ**. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ **ΑΕ** πρὸς τὸ **ΕΒ**, οὕτως τὸ **ΓΖ** πρὸς τὸ **ΖΔ**. καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΓΗ** πρὸς τὸ **ΗΔ**, οὕτως τὸ **ΓΖ** πρὸς τὸ **ΖΔ**. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ **ΓΗ** τοῦ τρίτου τοῦ **ΓΖ**· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ **ΗΔ** τοῦ τετάρτου τοῦ **ΖΔ**. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΓΔ** πρὸς ἔλασσον τοῦ **ΖΔ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ′.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸ **ΓΔ**, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ **ΑΕ** πρὸς ἀφειρεθὲν τὸ **ΓΖ**· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ **ΕΒ** πρὸς λοιπὸν τὸ **ΖΔ** ἔσται ὡς ὅλον τὸ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸ **ΓΔ**. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΓΔ**, οὕτως τὸ **ΑΕ** πρὸς τὸ **ΓΖ**, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ **ΒΑ** πρὸς τὸ **ΑΕ**, οὕτως τὸ **ΔΓ** πρὸς τὸ **ΓΖ**. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ **ΒΕ** πρὸς τὸ **ΕΑ**, οὕτως τὸ **ΔΖ** πρὸς τὸ **ΓΖ**· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ **ΒΕ** πρὸς τὸ **ΔΖ**, οὕτως τὸ **ΕΑ** πρὸς τὸ **ΖΓ**. ὡς δὲ τὸ **ΑΕ** πρὸς τὸ **ΓΖ**, οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸ **ΓΔ**.

καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ **ΕΒ** πρὸς λοιπὸν τὸ **ΖΔ** ἔσται ὡς ὅλον τὸ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸ **ΓΔ**. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι]. [Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΓΔ**, οὕτως τὸ **ΕΒ** πρὸς τὸ **ΖΔ**, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΕ** οὕτως τὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ **ΖΔ**, συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ **ΒΑ** πρὸς τὸ **ΑΕ**, οὕτως τὸ **ΔΓ** πρὸς τὸ **ΓΖ**· καί ἐστιν ἀναστρέψαντι].



Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγω, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ **Α**, **Β**, **Γ**, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ **Δ**, **Ε**, **Ζ**, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ε**, ὡς δὲ τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, δι᾽ ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ **Α** τοῦ **Γ**· λέγω, ὅτι καὶ τὸ **Δ** τοῦ **Ζ** μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ **Α** τοῦ **Γ**, ἄλλο δέ τι τὸ **Β**, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον, τὸ **Α** ἄρα πρὸς τὸ **Β** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β**. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β** [οὕτως] τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ε**, ὡς δὲ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β**, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ **Ζ** πρὸς τὸ **Ε**· καὶ τὸ **Δ** ἄρα πρὸς τὸ **Ε** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Ζ** πρὸς τὸ **Ε**. τῶν δὲ

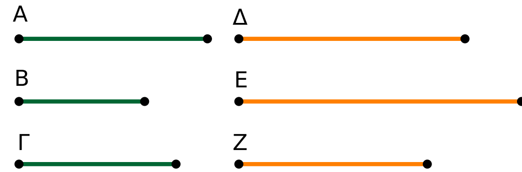
πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστιν. μεῖζον ἄρα τὸ **Δ** τοῦ **Ζ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ **Α** τῷ **Γ**, ἴσον ἔσται καὶ τὸ **Δ** τῷ **Ζ**, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ **Α**, **Β**, **Γ** καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ **Δ**, **Ε**, **Ζ**, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, ὡς δὲ τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ε**, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ **Α** τοῦ **Γ** μεῖζον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ **Δ** τοῦ **Ζ** μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.



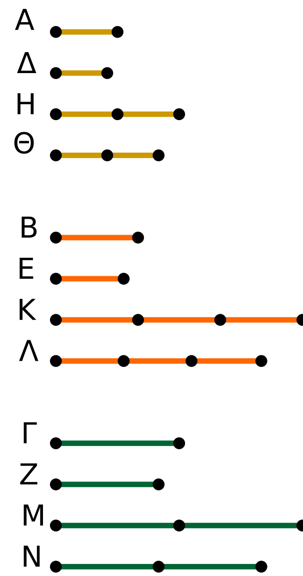
Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ **Α** τοῦ **Γ**, ἄλλο δέ τι τὸ **Β**, τὸ **Α** ἄρα πρὸς τὸ **Β** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β**. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, ὡς δὲ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Β**, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Δ**. καὶ τὸ **Ε** ἄρα πρὸς τὸ **Ζ** μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Δ**. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ **Ζ** τοῦ **Δ**· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ **Δ** τοῦ **Ζ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ **Α** τῷ **Γ**, ἴσον ἔσται καὶ τὸ **Δ** τῷ **Ζ**, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβʹ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ **Α**, **Β**, **Γ** καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ **Δ**, **Ε**, **Ζ**, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ε**, ὡς δὲ τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**· λέγω, ὅτι καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῳ λόγῳ ἔσται.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν **Α**, **Δ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, τῶν δὲ **Β**, **Ε** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Κ**, **Λ**, καὶ ἔτι τῶν **Γ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Μ**, **Ν**.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ε**, καὶ εἴληπται τῶν μὲν **Α**, **Δ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, τῶν δὲ **Β**, **Ε** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Κ**, **Λ**, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Η** πρὸς τὸ **Κ**, οὕτως τὸ **Θ** πρὸς τὸ **Λ**.

δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ **Κ** πρὸς τὸ **Μ**, οὕτως τὸ **Λ** πρὸς τὸ **Ν**. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ **Η**, **Κ**, **Μ**, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ **Θ**, **Λ**, **Ν**, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ **Η** τοῦ **Μ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Θ** τοῦ **Ν**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον.

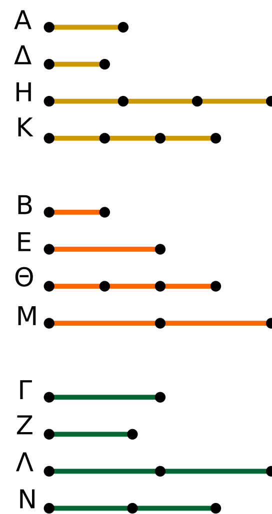
καί ἐστι τὰ μὲν **Η**, **Θ** τῶν **Α**, **Δ** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ **Μ**, **Ν** τῶν **Γ**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ζ**.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ΄.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ **Α**, **Β**, **Γ** καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ **Δ**, **Ε**, **Ζ**, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, ὡς δὲ τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ε**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ζ**.



Εἰλήφθω τῶν μὲν **Α**, **Β**, **Δ** ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ**, **Κ**, τῶν δὲ **Γ**, **Ε**, **Ζ** ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ **Λ**, **Μ**, **Ν**. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ **Η**, **Θ** τῶν **Α**, **Β**, τὰ δὲ μέρη τοὶς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Η** πρὸς τὸ **Θ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, οὕτως τὸ **Μ** πρὸς τὸ **Ν**· καί ἐστιν ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Β**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **Η** πρὸς τὸ **Θ**, οὕτως τὸ **Μ** πρὸς τὸ **Ν**. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **Β** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ε**, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ **Β** πρὸς τὸ **Δ**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Ε**. καὶ ἐπεὶ τὰ **Θ**, **Κ** τῶν **Β**, **Δ** ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Β** πρὸς τὸ **Δ**, οὕτως τὸ **Θ** πρὸς τὸ **Κ**. ἀλλ᾽ ὡς τὸ **Β** πρὸς τὸ **Δ**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Ε**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **Θ** πρὸς τὸ **Κ**, οὕτως τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Ε**.

πάλιν, ἐπεὶ τὰ **Λ**, **Μ** τῶν **Γ**, **Ε** ἰσάκις ἐστι πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Ε**, οὕτως τὸ **Λ** πρὸς τὸ **Μ**. ἀλλ᾽ ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **Ε**, οὕτως τὸ **Θ** πρὸς τὸ **Κ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **Θ** πρὸς τὸ **Κ**, οὕτως τὸ **Λ** πρὸς τὸ **Μ**, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ **Θ** πρὸς τὸ **Λ**, τὸ **Κ** πρὸς τὸ **Μ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ **Η** πρὸς τὸ **Θ**, οὕτως τὸ **Μ** πρὸς τὸ **Ν**.

ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ **Η**, **Θ**, **Λ**, καὶ ἄλλα αὐτοις ἴσα τὸ πλῆθος τὰ **Κ**, **Μ**, **Ν** σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καί ἐστιν αὐτῶν τεταραγμένη

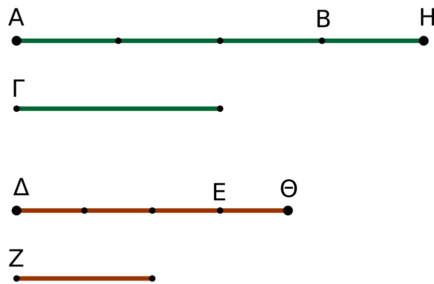
ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ **Η** τοῦ **Λ**, ὑπερέχει καὶ τὸ **Κ** τοῦ **Ν**, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν **Η**, **Κ** τῶν **Α**, **Δ** ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ **Λ**, **Ν** τῶν **Γ**, **Ζ**. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **Α** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **Δ** πρὸς τὸ **Ζ**.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ´.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ **ΑΒ** πρὸς δεύρερον τὸ **Γ** τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ **ΔΕ** πρὸς τέταρτον τὸ **Ζ**, ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ **ΒΗ** πρὸς δεύτερον τὸ **Γ** τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ **ΕΘ** πρὸς τέταρτον τὸ **Ζ**· λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ **ΑΗ** πρὸς δεύτερον τὸ **Γ** τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ **ΔΘ** πρὸς τέταρτον τὸ **Ζ**.



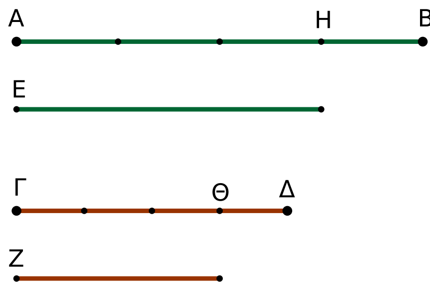
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ **ΒΗ** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **ΕΘ** πρὸς τὸ **Ζ**, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ **Γ** πρὸς τὸ **ΒΗ**, οὕτως τὸ **Ζ** πρὸς τὸ **ΕΘ**. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **ΔΕ** πρὸς τὸ **Ζ**, ὡς δὲ τὸ **Γ** πρὸς τὸ **ΒΗ**, οὕτως τὸ **Ζ** πρὸς τὸ **ΕΘ**, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΗ**, οὕτως τὸ **ΔΕ** πρὸς τὸ **ΕΘ**. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΗ** πρὸς τὸ **ΗΒ**, οὕτως τὸ **ΔΘ** πρὸς τὸ **ΘΕ**. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ **ΒΗ** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **ΕΘ** πρὸς τὸ **Ζ**· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ **ΑΗ** πρὸς τὸ **Γ**, οὕτως τὸ **ΔΘ** πρὸς τὸ **Ζ**.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· ὅπερ ἔδει δεὶξαι.

κε΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ**, **Ε**, **Ζ**, ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΓΔ**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ **ΑΒ**, ἐλάχιστον δὲ τὸ **Ζ**· λέγω, ὅτι τὰ **ΑΒ**, **Ζ** τῶν **ΓΔ**, **Ε** μείζονά ἐστιν.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν **Ε** ἴσον τὸ **ΑΗ**, τῷ δὲ **Ζ** ἴσον τὸ **ΓΘ**. Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΓΔ**, οὕτως τὸ **Ε** πρὸς τὸ **Ζ**, ἴσον δὲ τὸ μὲν **Ε** τῷ **ΑΗ**, τὸ δὲ **Ζ** τῷ **ΓΘ**, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΓΔ**, οὕτως τὸ **ΑΗ** πρὸς τὸ **ΓΘ**.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸ **ΓΔ**, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ **ΑΗ** πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ **ΓΘ**, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ **ΗΒ** πρὸς λοιπὸν τὸ **ΘΔ** ἔσται ὡς ὅλον τὸ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸ **ΓΔ**. μεῖζον δὲ τὸ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ**· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ **ΗΒ** τοῦ **ΘΔ**.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν **ΑΗ** τῷ **Ε**, τὸ δὲ **ΓΘ** τῷ **Ζ**, τὰ ἄρα **ΑΗ**, **Ζ** ἴσα ἐστὶ τοῖς **ΓΘ**, **Ε**. καὶ [ἐπεὶ] ἐὰν [ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισά ἐστιν, ἐὰν ἄρα] τῶν **ΗΒ**, **ΘΔ** ἀνίσων ὄντων καὶ μείζονος τοῦ **ΗΒ** τῷ μὲν **ΗΒ** προστεθῇ τὰ **ΑΗ**, **Ζ**, τῷ δὲ **ΘΔ** προστεθῇ τὰ **ΓΘ**, **Ε**, συνάγεται τὰ **ΑΒ**, **Ζ** μείζονα τῶν **ΓΔ**, **Ε**.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 6

Ὅροι

α΄. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

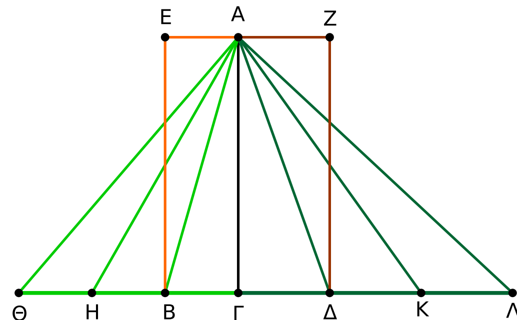
β΄. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττὸν.

γ΄. Ὕψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

α΄.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ **ΑΒΓ**, **ΑΓΔ**, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ **ΕΓ**, **ΓΖ** ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ **ΑΓ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΓΔ** βάσις, οὕτως τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΓΔ** τρίγωνον, καὶ τὸ **ΕΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΖ** παραλληλόγραμμον.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ **ΒΔ** ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ **Θ**, **Λ** σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν **ΒΓ** βάσει ἴσαι [ὁσαιδηποτοῦν] αἱ **ΒΗ**, **ΗΘ**, τῇ δὲ **ΓΔ** βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ **ΔΚ**, **ΚΛ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΗ**, **ΑΘ**, **ΑΚ**, **ΑΛ**.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ **ΓΒ**, **ΒΗ**, **ΗΘ** ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ **ΑΘΗ**, **ΑΗΒ**, **ΑΒΓ** τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ **ΘΓ** βάσις τῆς **ΒΓ** βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ **ΑΘΓ** τρίγωνον τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ **ΛΓ** βάσις τῆς **ΓΔ** βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ **ΑΛΓ** τρίγωνον τοῦ **ΑΓΔ** τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ **ΘΓ** βάσις τῇ **ΓΛ** βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ **ΑΘΓ** τρίγωνον τῳ **ΑΓΛ** τριγώνῳ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ **ΘΓ** βάσις τῆς **ΓΛ** βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ **ΑΘΓ** τρίγωνον τοῦ **ΑΓΛ** τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον.

τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν βάσεων τῶν **ΒΓ**, **ΓΔ**, δύο δὲ τριγώνων τῶν **ΑΒΓ**, **ΑΓΔ** εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν **ΒΓ** βάσεως καὶ τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου ἥ τε **ΘΓ** βάσις καὶ τὸ **ΑΘΓ** τρίγωνον, τῆς δὲ **ΓΔ** βάσεως καὶ τοῦ **ΑΔΓ** τριγώνου ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε **ΛΓ** βάσις

καὶ τὸ **ΑΛΓ** τρίγωνον· καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ **ΘΓ** βάσις τῆς **ΓΛ** βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ **ΑΘΓ** τρίγωνον τοῦ **ΑΛΓ** τριγώνου, καί εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσων, ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΓΔ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΓΔ** τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν **ΑΒΓ** τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ **ΕΓ** παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ **ΑΓΔ** τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ **ΖΓ** παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΓΔ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΕΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΖΓ** παραλληλόγραμμον.

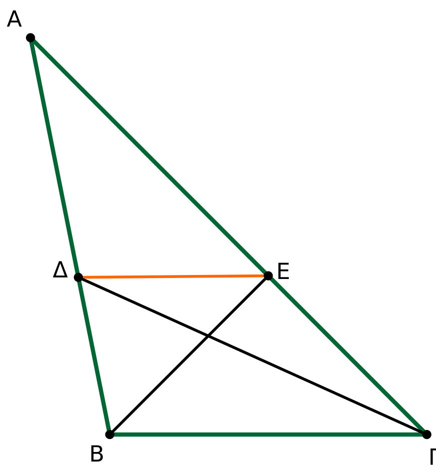
ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ **ΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΓΔ** τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΓΔ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΕΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΖ** παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΓΔ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΕΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΖΓ** παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ **ΑΒΓ** παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ **ΒΓ** ἤχθω ἡ **ΔΕ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΕ**, **ΓΔ**. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΔΕ** τρίγωνον τῷ **ΓΔΕ** τριγώνῳ· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς **ΔΕ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΔΕ**, **ΒΓ**· ἄλλο δέ τι τὸ **ΑΔΕ** τρίγωνον.

τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΒΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ** [τρίγωνον], οὕτως τὸ **ΓΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ** τρίγωνον.

ἀλλ' ὡς μὲν τὸ **ΒΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ**, οὕτως ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ

τοῦ **Ε** ἐπὶ τὴν **ΑΒ** κάθετον ἀγομένην πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ **ΓΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ**, οὕτως ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ **ΑΒ**, **ΑΓ** ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΕ**· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΔΕ** τῇ **ΒΓ**.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως τὸ **ΒΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ** τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**, οὕτως τὸ **ΓΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ** τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΒΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΓΔΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΔΕ** τρίγωνον.

ἑκάτερον ἄρα τῶν **ΒΔΕ**, **ΓΔΕ** τριγώνων πρὸς τὸ **ΑΔΕ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΔΕ** τρίγωνον τῷ **ΓΔΕ** τριγώνῳ· καί εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς **ΔΕ**. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΔΕ** τῇ **ΒΓ**.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

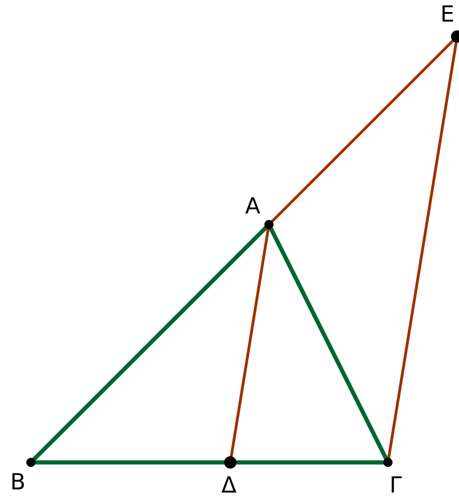
Ἔστω τρίγωνον τὸ **ΑΒΓ**, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία δίχα ὑπὸ τῆς **ΑΔ** εὐθείας· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ **Γ** τῇ **ΔΑ** παράλληλος ἡ **ΓΕ**, καὶ διαχθεῖσα ἡ **ΒΑ** συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ **Ε**. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς **ΑΔ**, **ΕΓ** εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ **ΑΓ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΓΕ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ **ΓΑΔ**. ἀλλ' ἡ ὑπὸ **ΓΑΔ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΔ** ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΑΓΕ** ἐστιν ἴση.

πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς **ΑΔ**, **ΕΓ** εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ **ΒΑΕ**, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ **ΑΕΓ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΔ** ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΕΓ** ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ

πλευρὰ ἡ **ΑΕ** πλευρᾷ τῇ **ΑΓ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΒΓΕ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΕΓ** ἦκται ἡ **ΑΔ**, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΓ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΕ**. ἴση δὲ ἡ **ΑΕ** τῇ **ΑΓ**· ὡς ἄρα ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΓ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΓ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΔ**· λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία ὑπὸ τῆς **ΑΔ** εὐθείας. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΓ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΓ**, οὕτως ἐστὶν ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΕ**· τριγώνου γὰρ τοῦ **ΒΓΕ** παρὰ μίαν τὴν **ΕΓ** ἦκται ἡ **ΑΔ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΕ**. ἴση ἄρα ἡ **ΑΓ** τῇ **ΑΕ**· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΕΓ** τῇ ὑπὸ **ΑΓΕ** ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΕΓ** τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ **ΒΑΔ** [ἐστιν] ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΓΕ** τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ **ΓΑΔ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΓΑΔ** ἐστιν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς **ΑΔ** εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

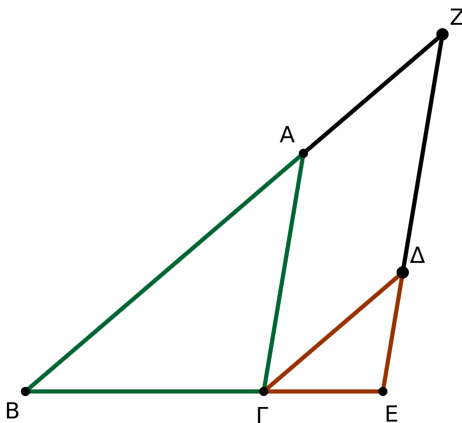
δ′.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΓΕ** ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίαν τῇ ὑπὸ **ΔΓΕ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΓΔΕ** καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΓΕΔ**· λέγω, ὅτι τῶν **ΑΒΓ**, **ΔΓΕ** τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ **ΒΓ** τῇ **ΓΕ**. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΑΓΒ** γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΓ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ**,

ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· αἱ **ΒΑ**, **ΕΔ** ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ **Ζ**. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΔΓΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**, παράλληλός ἐστιν ἡ **ΒΖ** τῇ **ΓΔ**.



πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΓ**, παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΖΕ**. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΑΓΔ**· ἴση ἄρα ἡ μὲν **ΖΑ** τῇ **ΔΓ**, ἡ δὲ **ΑΓ** τῇ **ΖΔ**. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΖΒΕ** παρὰ μίαν τὴν **ΖΕ** ἦκται ἡ **ΑΓ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΖ**, οὕτως ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**. ἴση δὲ ἡ **ΑΖ** τῇ **ΓΔ**· ὡς ἄρα ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**.

πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΓΔ** τῇ **ΒΖ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**, οὕτως ἡ **ΖΔ** πρὸς τὴν **ΔΕ**. ἴση δὲ ἡ **ΖΔ** τῇ **ΑΓ**· ὡς ἄρα ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**, οὕτως ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΔΕ**, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΑ**, οὕτως ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΔ**. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**, ὡς δὲ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΑ**, οὕτως ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΔ**, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως ἡ **ΓΔ** πρὸς τὴν **ΔΕ**.

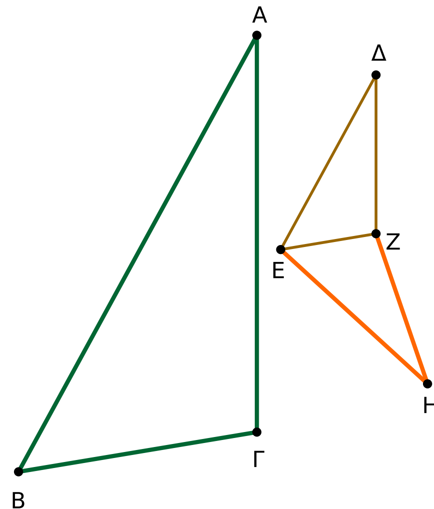
Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὴν **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, ὡς δὲ τὴν **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΑ**, οὕτως τὴν **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΖΔ**, καὶ ἔτι ὡς τὴν **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως τὴν **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΔΖ**. λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΒΓΑ** τῇ ὑπὸ **ΕΖΔ** καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ **ΕΖ** εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς **Ε**, **Ζ** τῇ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΖΕΗ**, τῇ δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** ἴση ἡ ὑπὸ **ΕΖΗ**·



λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Α** λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ **Η** ἐστιν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΕΗΖ** [τριγώνῳ]. τῶν ἄρα **ΑΒΓ**, **ΕΗΖ** τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι·

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, [οὕτως] ἡ **ΗΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**. ἀλλ' ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως ὑπόκειται ἡ **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**· ὡς ἄρα ἡ **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, οὕτως ἡ **ΗΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**. ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΔΕ**, **ΗΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΔΕ** τῇ **ΗΕ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΔΖ** τῇ **ΗΖ** ἐστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΕ** τῇ **ΕΗ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΕΖ**, δύο δὴ αἱ **ΔΕ**, **ΕΖ** δυσὶ ταῖς **ΗΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΔΖ** βάσει τῇ **ΖΗ** [ἐστιν] ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΕΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΗΕΖ** ἐστιν ἴση, καὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον τῷ **ΗΕΖ** τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΔΖΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΗΖΕ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΕΔΖ** τῇ ὑπὸ **ΕΗΖ**. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΖΕΔ** τῇ ὑπὸ **ΗΕΖ** ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ **ΗΕΖ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**, καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ** ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ **Α** τῇ πρὸς τῷ **Δ**· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.

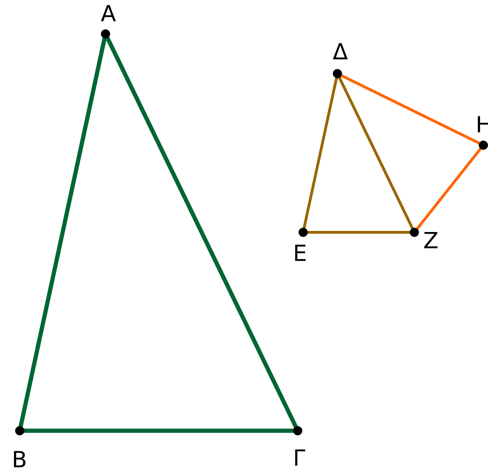
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως τὴν **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΔΖ**· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν

ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ καὶ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίαν τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ**.



Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ **ΔΖ** εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς **Δ**, **Ζ** ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ** ἴση ἡ ὑπὸ **ΖΔΗ**, τῇ δὲ ὑπὸ **ΑΓΒ** ἴση ἡ ὑπὸ **ΔΖΗ**· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Β** γωνία λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ **Η** ἴση ἐστίν.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΗΖ** τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως ἡ **ΗΔ** πρὸς τὴν **ΔΖ**. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως ἡ **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΔΖ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΔΖ**, οὕτως ἡ **ΗΔ** πρὸς τὴν **ΔΖ**. ἴση ἄρα ἡ **ΕΔ** τῇ **ΔΗ**· καὶ κοινὴ ἡ **ΔΖ**· δύο δὴ αἱ **ΕΔ**, **ΔΖ** δυσὶ ταῖς **ΗΔ**, **ΔΖ** ἴσας εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΔΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΗΔΖ** [ἐστιν] ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΕΖ** βάσει τῇ **ΗΖ** ἐστιν ἴση, καὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον τῷ **ΗΔΖ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσας ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΔΖΗ** τῇ ὑπο **ΔΖΕ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΔΗΖ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ **ΔΖΗ** τῇ ὑπὸ **ΑΓΒ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ** ἐστιν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Β** λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ **Ε** ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

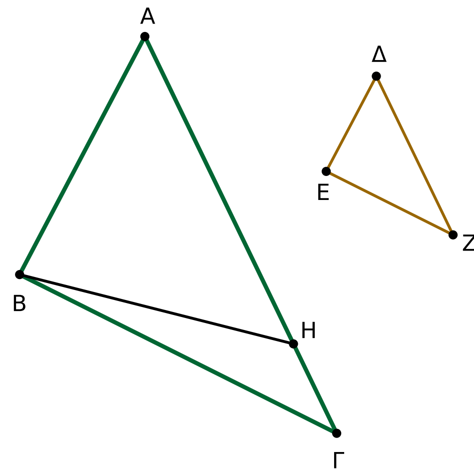
ζʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ**, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τὰς

πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὴν **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς **Γ**, **Ζ** πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ **Γ** λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ **Ζ** ἴσῃ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ**. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Β** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΑΒΗ**. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **Α** γωνία τῇ **Δ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΒΗ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΗΒ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ** ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΗ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.



ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΗ**, οὕτως ἡ **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**. ὡς δὲ ἡ **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, [οὕτως] ὑπόκειται ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**· ἡ **ΑΒ** ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΒΓ**, **ΒΗ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ **ΒΓ** τῇ **ΒΗ**.

ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Γ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΗΓ** ἐστιν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ **Γ**· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ὑπὸ **ΒΗΓ**· ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΗΒ** μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ **Ζ**· καὶ ἡ πρὸς τῷ **Ζ** ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον.

οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ **Α** ἴση τῇ πρὸς τῷ **Δ**· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Γ** λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ **Ζ** ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς **Γ**, **Ζ** μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΒΗ**· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Γ** τῇ ὑπὸ **ΒΗΓ** ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ **Γ**· οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ **ΒΗΓ**. τριγώνου δὴ τοῦ **ΒΗΓ** αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὔκ εἰσιν ἐλάττονες· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ **Α** τῇ πρὸς τῷ **Δ** ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ

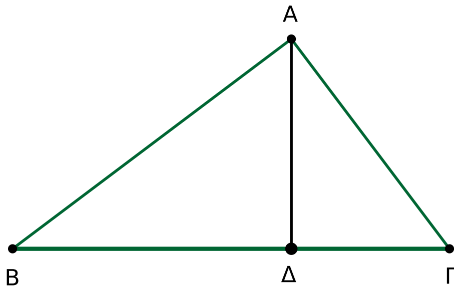
Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ **Ζ** ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἐλάττονα ἢ μὴ ἐλάττονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπό τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ **ΑΒΓ** ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Α** ἐπὶ τὴν **ΒΓ** κάθετος ἡ **ΑΔ**· λέγω, ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν **ΑΒΔ**, **ΑΔΓ** τριγώνων ὅλῳ τῷ **ΑΒΓ** καὶ ἔτι ἀλλήλοις.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΑΔΒ**· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε **ΑΒΓ** καὶ τοῦ **ΑΒΔ** ἡ πρὸς τῷ **Β**, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** λοιπῇ τῇ ὑπο **ΒΑΔ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΒΔ** τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΓ** ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου πρὸς τὴν **ΒΑ** ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ **ΑΒΔ** τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ **ΑΒ** ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ **Γ** γωνίαν τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου πρὸς τὴν **ΒΔ** ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ **ΒΑΔ** τοῦ **ΑΒΔ** τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΑΔ** ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ **Β** γωνίαν κοινὴν τῶν δύο τριγώνων. τὸ **ΑΒΓ** ἄρα τρίγωνον τῷ **ΑΒΔ** τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἅμα [ἐστὶ] τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΒΔ** τριγώνῳ.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ **ΑΔΓ** τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν **ΑΒΔ**, **ΑΔΓ** [τριγώνων] ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ **ΑΒΓ**.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ **ΑΒΔ**, **ΑΔΓ** τρίγωνα. Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΒΔΑ** ὀρθῇ τῇ ὑπὸ **ΑΔΓ** ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΔ** τῇ πρὸς τῷ **Γ** ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Β** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΔΑΓ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον τῷ **ΑΔΓ** τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΔ** τοῦ **ΑΒΔ** τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ **ΒΑΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**

τοῦ **ΑΔΓ** τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ **Γ** ἴσην τῇ ὑπὸ **ΒΑΔ**, οὕτως αὐτὴ ἡ **ΑΔ** τοῦ **ΑΒΔ** τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ **Β** γωνίαν πρὸς τὴν **ΔΓ** ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ **ΔΑΓ** τοῦ **ΑΔΓ** τριγώνου ἴσην τῇ πρὸς τῷ **Β**, καὶ ἔτι ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ** ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον τῷ **ΑΔΓ** τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

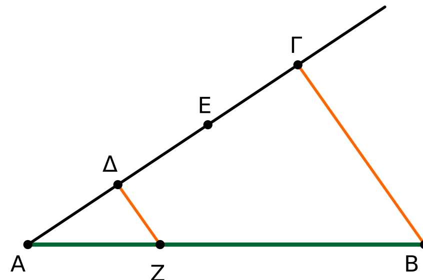
Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσις κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ′.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ τῆς **ΑΒ** τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καὶ] διήχθω τις ἀπὸ τοῦ **Α** εὐθεῖα ἡ **ΑΓ** γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς **ΑΒ** τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς **ΑΓ** τὸ **Δ**, καὶ κείσθωσαν τῇ **ΑΔ** ἴσαι αἱ **ΔΕ**, **ΕΓ**. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΓ**, καὶ διὰ τοῦ **Δ** παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ **ΔΖ**.



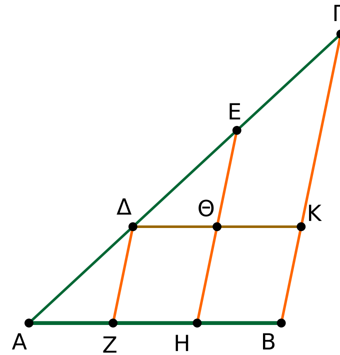
Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ **ΑΒΓ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΒΓ** ἦκται ἡ **ΖΔ**, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΓΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως ἡ **ΒΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**. διπλῆ δὲ ἡ **ΓΔ** τῆς **ΔΑ**· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ **ΒΖ** τῆς **ΖΑ**· τριπλῆ ἄρα ἡ **ΒΑ** τῆς **ΑΖ**.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς **ΑΒ** τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ **ΑΖ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ **ΑΒ**, ἡ δὲ τετμημένη ἡ **ΑΓ** κατὰ τὰ **Δ**, **Ε** σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΓΒ**, καὶ διὰ τῶν **Δ**, **Ε** τῇ **ΒΓ** παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ **ΔΖ**, **ΕΗ**, διὰ δὲ τοῦ **Δ** τῇ **ΑΒ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΔΘΚ**.



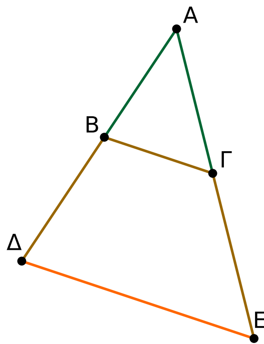
Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν **ΖΘ**, **ΘΒ**· ἴση ἄρα ἡ μὲν **ΔΘ** τῇ **ΖΗ**, ἡ δὲ **ΘΚ** τῇ **ΗΒ**. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΔΚΓ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΚΓ** εὐθεῖα ἦκται ἡ **ΘΕ**, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΔ**, οὕτως ἡ **ΚΘ** πρὸς τὴν **ΘΔ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΚΘ** τῇ **ΒΗ**, ἡ δὲ **ΘΔ** τῇ **ΗΖ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΔ**, οὕτως ἡ **ΒΗ** πρὸς τὴν **ΗΖ**.

πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΑΗΕ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΗΕ** ἦκται ἡ **ΖΔ**, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως ἡ **ΗΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΔ**, οὕτως ἡ **ΒΗ** πρὸς τὴν **ΗΖ**· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ **ΓΕ** πρὸς τὴν **ΕΔ**, οὕτως ἡ **ΒΗ** πρὸς τὴν **ΗΖ**, ὡς δὲ ἡ **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΔΑ**, οὕτως ἡ **ΗΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ **ΑΒ** τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ **ΑΓ** ὁμοίως τέτμηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι·

ια΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι [δύο εὐθεῖαι] αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ** καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ **Δ**, **Ε** σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ **ΑΓ** ἴση ἡ **ΒΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΓ**, καὶ διὰ τοῦ **Δ** παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ **ΔΕ**.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ **ΑΔΕ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΔΕ** ἦκται ἡ **ΒΓ**,

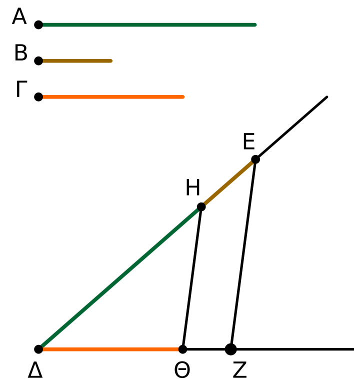
ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΔ**, οὕτως ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**. ἴση δὲ ἡ **ΒΔ** τῇ **ΑΓ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν **ΑΒ**, **ΑΓ** τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ **ΓΕ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβʹ.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ **Α**, **Β**, **Γ**· δεῖ δὴ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



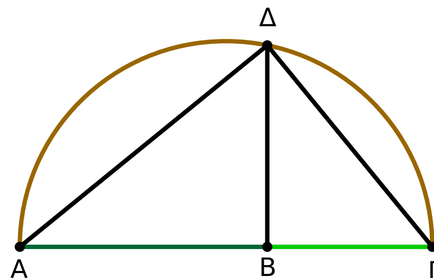
Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ **ΔΕ**, **ΔΖ** γωνίαν περιέχουσαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ **ΕΔΖ**· καὶ κείσθω τῇ μὲν **Α** ἴση ἡ **ΔΗ**, τῇ δὲ **Β** ἴση ἡ **ΗΕ**, καὶ ἔτι τῇ **Γ** ἴση ἡ **ΔΘ**· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς **ΗΘ** παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ **Ε** ἡ **ΕΖ**.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ **ΔΕΖ** παρὰ μίαν τὴν **ΕΖ** ἦκται ἡ **ΗΘ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΔΗ** πρὸς τὴν **ΗΕ**, οὕτως ἡ **ΔΘ** πρὸς τὴν **ΘΖ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΔΗ** τῇ **Α**, ἡ δὲ **ΗΕ** τῇ **Β**, ἡ δὲ **ΔΘ** τῇ **Γ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Γ** πρὸς τὴν **ΘΖ**. Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ **ΘΖ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγʹ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**· δεῖ δὴ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς **ΑΓ** ἡμικύκλιον τὸ **ΑΔΓ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Β** σημείου τῇ **ΑΓ** εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΒΔ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΔΓ**.

Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΔΓ**, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ **ΑΔΓ** ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ **ΔΒ**, ἡ **ΔΒ** ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** μέση ἀνάλογόν

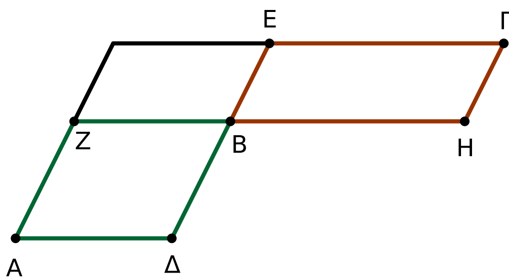
ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ **ΔΒ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιδʹ.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ **Β** γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ **ΔΒ**, **ΒΕ**· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ **ΖΒ**, **ΒΗ**. λέγω, ὅτι τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΕ**, οὕτως ἡ **ΗΒ** πρὸς τὴν **ΒΖ**.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ **ΖΕ** παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΒΓ** παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ **ΖΕ**, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΖΕ**, οὕτως τὸ **ΒΓ** πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΖΕ**, οὕτως ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΕ**, ὡς δὲ τὸ **ΒΓ** πρὸς τὸ **ΖΕ**, οὕτως ἡ **ΗΒ** πρὸς τὴν **ΒΖ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΕ**, οὕτως ἡ **ΗΒ** πρὸς τὴν **ΒΖ**. τῶν ἄρα **ΑΒ**, **ΒΓ** παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΕ**, οὕτως ἡ **ΗΒ** πρὸς τὴν **ΒΖ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΒΓ** παραλληλογράμμῳ.

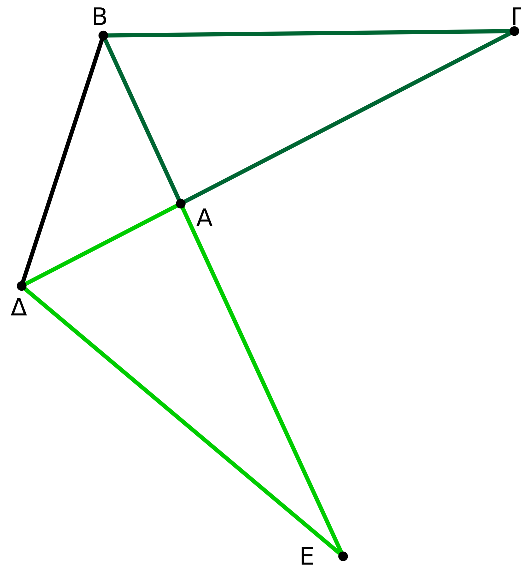
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΕ**, οὕτως ἡ **ΗΒ** πρὸς τὴν **ΒΖ**, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΕ**, οὕτως τὸ **ΑΒ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΖΕ** παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ **ΗΒ** πρὸς τὴν **ΒΖ**, οὕτως τὸ **ΒΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΖΕ** παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΖΕ**, οὕτως τὸ **ΒΓ** πρὸς τὸ **ΖΕ**· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΒΓ** παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΑΔΕ** μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΔΑΕ**· λέγω, ὅτι τῶν **ΑΒΓ**, **ΑΔΕ** τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΓΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως ἡ **ΕΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**.



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν **ΓΑ** τῇ **ΑΔ**· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ **ΕΑ** τῇ **ΑΒ**. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΔ**.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΔΕ** τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ **ΒΑΔ**, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΓΑΒ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΑΔ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΕΑΔ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΑΔ** τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ **ΓΑΒ** πρὸς τὸ **ΒΑΔ**, οὕτως ἡ **ΓΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, ὡς δὲ τὸ **ΕΑΔ** πρὸς τὸ **ΒΑΔ**, οὕτως ἡ **ΕΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**. καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΓΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως ἡ **ΕΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**. τῶν **ΑΒΓ**, **ΑΔΕ** ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν **ΑΒΓ**, **ΑΔΕ** τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ **ΓΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως ἡ **ΕΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΔΕ** τριγώνῳ.

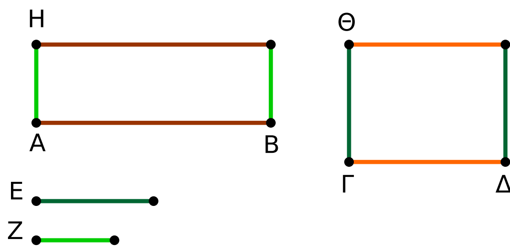
Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς **ΒΔ**, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΓΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως ἡ **ΕΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ **ΓΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΑΔ** τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ **ΕΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**, οὕτως τὸ **ΕΑΔ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΑΔ** τρίγωνον, ὡς ἄρα τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΑΔ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΕΑΔ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΑΔ** τρίγωνον. ἑκάτερον ἄρα τῶν **ΑΒΓ**, **ΕΑΔ** πρὸς τὸ **ΒΑΔ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσων ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** [τρίγωνον] τῷ **ΕΑΔ** τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧς μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, **Ε**, **Ζ**, ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **Ε** πρὸς τὴν **Ζ**· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **Ζ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΓΔ**, **Ε** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἤχθωσαν [γὰρ] ἀπὸ τῶν **Α**, **Γ** σημείων ταῖς **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ **ΑΗ**, **ΓΘ**, καὶ κείσθω τῇ μὲν **Ζ** ἴση ἡ **ΑΗ**, τῇ δὲ **Ε** ἴση ἡ **ΓΘ**. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ **ΒΗ**, **ΔΘ** παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **Ε** πρὸς τὴν **Ζ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **Ε** τῇ **ΓΘ**, ἡ δὲ **Ζ** τῇ **ΑΗ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΓΘ** πρὸς τὴν **ΑΗ**. τῶν **ΒΗ**, **ΔΘ** ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνάις, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΗ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΔΘ** παραλληλογράμμῳ.

καί ἐστι τὸ μὲν **ΒΗ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **Ζ**· ἴση γὰρ ἡ **ΑΗ** τῇ **Ζ**· τὸ δὲ **ΔΘ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΓΔ**, **Ε**· ἴση γὰρ ἡ **Ε** τῇ **ΓΘ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **Ζ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΓΔ**, **Ε** περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **Ζ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν **ΓΔ**, **Ε** περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **Ε** πρὸς τὴν **Ζ**.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **Ζ** ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **ΓΔ**, **Ε**, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν **ΑΒ**, **Ζ** τὸ **ΒΗ**· ἴση γάρ ἐστιν ἡ **ΑΗ** τῇ **Ζ**· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν **ΓΔ**, **Ε** τὸ **ΔΘ**· ἴση γὰρ ἡ **ΓΘ** τῇ **Ε**· τὸ ἄρα **ΒΗ** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΔΘ**. καί ἐστιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΓΘ** πρὸς τὴν **ΑΗ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΓΘ** τῇ **Ε**, ἡ δὲ **ΑΗ** τῇ **Ζ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **Ε** πρὸς τὴν **Ζ**.

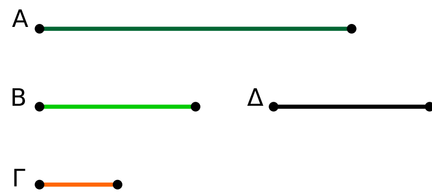
Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιε-

χόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ **Α**, **Β**, **Γ**, ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Β** πρὸς τὴν **Γ**· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **Γ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **Β** τετραγώνῳ.



Κείσθω τῇ **Β** ἴση ἡ **Δ**. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Β** πρὸς τὴν **Γ**, ἴση δὲ ἡ **Β** τῇ **Δ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, ἡ **Δ** πρὸς τὴν **Γ**. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **Α**, **Γ** ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **Β**, **Δ**. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν **Β**, **Δ** τὸ ἀπὸ τῆς **Β** ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ **Β** τῇ **Δ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **Α**, **Γ** περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **Β** τετραγώνῳ.

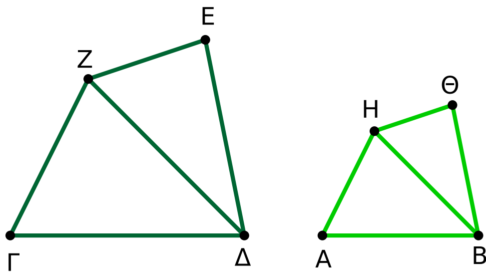
Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **Γ** ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς **Β**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Β** πρὸς τὴν **Γ**. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν **Α**, **Γ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **Β**, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς **Β** τὸ ὑπὸ τῶν **Β**, **Δ** ἐστιν· ἴση γὰρ ἡ **Β** τῇ **Δ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **Α**, **Γ** ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν **Β**, **Δ**. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Δ** πρὸς τὴν **Γ**. ἴση δὲ ἡ **Β** τῇ **Δ**· ὡς ἄρα ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Β** πρὸς τὴν **Γ**.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ **ΓΕ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** εὐθείας τῷ **ΓΕ** εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.



Ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΖ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς **Α**, **Β** τῇ μὲν πρὸς τῷ **Γ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΗΑΒ**, τῇ δὲ ὑπὸ **ΓΔΖ** ἴση ἡ ὑπὸ **ΑΒΗ**. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΖΔ** τῇ ὑπὸ **ΑΗΒ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΓΔ** τρίγωνον τῷ **ΗΑΒ** τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΖΔ** πρὸς τὴν **ΗΒ**, οὕτως ἡ **ΖΓ** πρὸς τὴν **ΗΑ**, καὶ ἡ **ΓΔ** πρὸς τὴν **ΑΒ**.

πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ **ΒΗ** εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς **Β**, **Η** τῇ μὲν ὑπὸ **ΔΖΕ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**, τῇ δὲ ὑπὸ **ΖΔΕ** ἴση ἡ ὑπὸ **ΗΒΘ**. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ **Ε** λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ **Θ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΖΔΕ** τρίγωνον τῷ **ΗΘΒ** τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΖΔ** πρὸς τὴν **ΗΒ**, οὕτως ἡ **ΖΕ** πρὸς τὴν **ΗΘ** καὶ ἡ **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΘΒ**.

ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ **ΖΔ** πρὸς τὴν **ΗΒ**, οὕτως ἡ **ΖΓ** πρὸς τὴν **ΗΑ** καὶ ἡ **ΓΔ** πρὸς τὴν **ΑΒ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΖΓ** πρὸς τὴν **ΑΗ**, οὕτως ἥ τε **ΓΔ** πρὸς τὴν **ΑΒ** καὶ ἡ **ΖΕ** πρὸς τὴν **ΗΘ** καὶ ἔτι ἡ **ΕΔ** πρὸς τὴν **ΘΒ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΓΖΔ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΗΒ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΔΖΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΗΘ**, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΖΕ** ὅλῃ τῇ ὑπὸ **ΑΗΘ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΔΕ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΘ** ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ **Γ** τῇ πρὸς τῷ **Α** ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ **Ε** τῇ πρὸς τῷ **Θ**. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΘ** τῷ **ΓΕ**· καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΘ** εὐθύγραμμον τῷ **ΓΕ** εὐθυγράμμῳ.

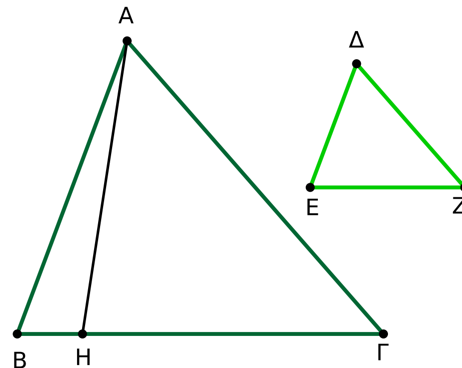
Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς **ΑΒ** τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **ΓΕ** ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ **ΑΘ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιθʹ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ **Β** γωνίαν τῇ πρὸς τῷ **Ε**, ὡς δὲ τὴν **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὴν **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**· λέγω, ὅτι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ** τρίτη ἀνάλογον ἡ **ΒΗ**, ὥστε εἶναι ὡς τὴν **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, οὕτως τὴν **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΒΗ**· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΗ**.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως ἡ **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΔΕ**, οὕτως ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**. ἀλλ᾽ ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς **ΕΖ**, οὕτως ἐστιν ἡ **ΕΖ** πρὸς **ΒΗ**. καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΑΒ** πρὸς **ΔΕ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς **ΒΗ**·

τῶν **ΑΒΗ**, **ΔΕΖ** ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνάις. ὧν δὲ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνάις, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΗ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΒΗ**, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ **ΒΓ** ἄρα πρὸς τὴν **ΒΗ** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΓΒ** πρὸς τὴν **ΕΖ**. ὡς δὲ ἡ **ΓΒ** πρὸς τὴν **ΒΗ**, οὕτως τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΒΗ** τρίγωνον· καὶ τὸ **ΑΒΓ** ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ **ΑΒΗ** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**.

ἴσον δὲ τὸ **ΑΒΗ** τρίγωνον τῷ **ΔΕΖ** τριγώνῳ. καὶ τὸ **ΑΒΓ** ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**.

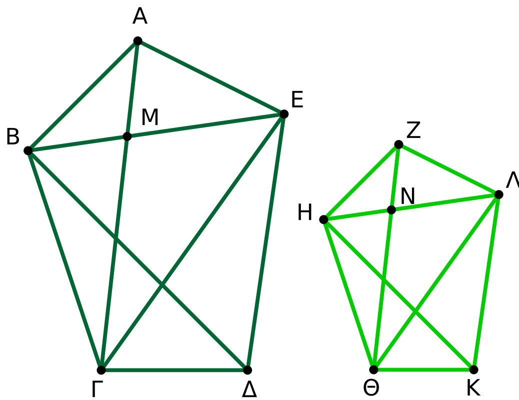
Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. [ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ **ΑΒΓΔΕ**, **ΖΗΘΚΛ**, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ **ΑΒ** τῇ **ΖΗ**· λέγω, ὅτι τὰ **ΑΒΓΔΕ**, **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΖΗ**.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΕ**, **ΕΓ**, **ΗΛ**, **ΛΘ**. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔΕ** πολύγωνον τῷ **ΖΗΘΚΛ** πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΗΖΛ**. καί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς **ΑΕ**, οὕτως ἡ **ΗΖ** πρὸς **ΖΛ**.

ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ **ΑΒΕ**, **ΖΗΛ** μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον τῷ **ΖΗΛ** τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΗΛ**. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ὅλῃ τῇ ὑπὸ **ΖΗΘ** ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΛΗΘ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΑΒΕ**, **ΖΗΛ** τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ **ΕΒ** πρὸς **ΒΑ**, οὕτως ἡ **ΛΗ** πρὸς **ΗΖ**, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς **ΒΓ**, οὕτως ἡ **ΖΗ** πρὸς **ΗΘ**, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΕΒ** πρὸς **ΒΓ**, οὕτως ἡ **ΛΗ** πρὸς **ΗΘ**, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνάις τὰς ὑπὸ **ΕΒΓ**, **ΛΗΘ** αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΕΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΛΗΘ** τριγώνῳ· ὥστε καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΕΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΛΗΘ** τριγώνω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΕΓΔ** τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ **ΛΘΚ** τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ **ΑΒΓΔΕ**, **ΖΗΘΚΛ** εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ **ΑΒΕ**, **ΕΒΓ**, **ΕΓΔ**, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ **ΖΗΛ**, **ΛΗΘ**, **ΛΘΚ**, καὶ ὅτι τὸ **ΑΒΓΔΕ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΖΗ**.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΑΓ**, **ΖΘ**. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΗΘ**, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς **ΒΓ**, οὕτως ἡ **ΖΗ** πρὸς **ΗΘ**, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΖΗΘ** τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΗΖΘ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΒΓΑ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΖ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΜ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΗΖΝ**, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΜ** τῇ ὑπὸ **ΖΗΝ** ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΜΒ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΖΝΗ** ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΜ** τρίγωνον τῷ **ΖΗΝ** τριγώνῳ.

ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τὸ **ΒΜΓ** τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ **ΗΝΘ** τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ **ΑΜ** πρὸς **ΜΒ**, οὕτως ἡ **ΖΝ** πρὸς **ΝΗ**, ὡς δὲ ἡ **ΒΜ** πρὸς **ΜΓ**, οὕτως ἡ **ΗΝ** πρὸς **ΝΘ**· ὥστε καὶ δι᾽ ἴσου, ὡς ἡ **ΑΜ** πρὸς **ΜΓ**, οὕτως ἡ **ΖΝ** πρὸς **ΝΘ**. ἀλλ᾽ ὡς ἡ **ΑΜ** πρὸς **ΜΓ**, οὕτως τὸ **ΑΒΜ** [τρίγωνον] πρὸς τὸ **ΜΒΓ**, καὶ τὸ **ΑΜΕ** πρὸς τὸ **ΕΜΓ**· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπόμενων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ **ΑΜΒ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΜΓ**, οὕτως τὸ **ΑΒΕ** πρὸς τὸ **ΓΒΕ**. αλλ᾽ ὡς τὸ **ΑΜΒ** πρὸς τὸ **ΒΜΓ**, οὕτως ἡ **ΑΜ** πρὸς **ΜΓ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΑΜ** πρὸς **ΜΓ**, οὕτως τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΕΒΓ** τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ **ΖΝ** πρὸς **ΝΘ**, οὕτως τὸ **ΖΗΛ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΗΛΘ** τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΜ** πρὸς **ΜΓ**, οὕτως ἡ **ΖΝ** πρὸς **ΝΘ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΕΓ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΖΗΛ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΗΛΘ** τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΛ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΒΕΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΗΛΘ** τρίγωνον.

ὁμοίως δὴ δείξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν **ΒΔ**, **ΗΚ**, ὅτι καὶ ὡς τὸ **ΒΕΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΛΗΘ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΕΓΔ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΛΘΚ** τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΛ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΕΒΓ** πρὸς τὸ **ΛΗΘ**, καὶ ἔτι τὸ **ΕΓΔ** πρὸς τὸ **ΛΘΚ**, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΛ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΑΒΓΔΕ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΛ** τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΑΒ** ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν **ΖΗ** ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΑΒ** ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν **ΖΗ** ὁμόλογον πλευράν.

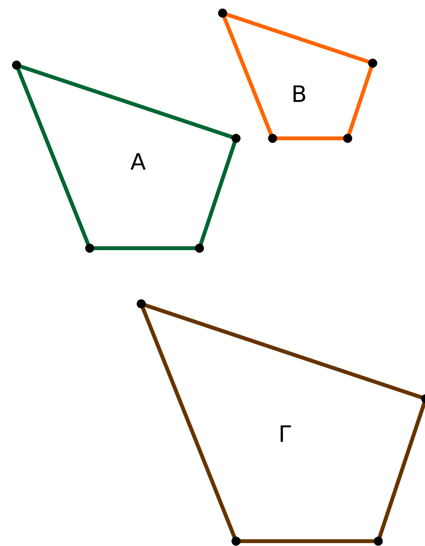
Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Π ό ρ ι σ μ α : Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα′.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν **Α**, **Β** εὐθυγράμμων τῷ **Γ** ὅμοιον· λέγω, ὅτι καὶ τὸ **Α** τῷ **Β** ἐστιν ὅμοιον.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ **Α** τῷ **Γ**, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει.

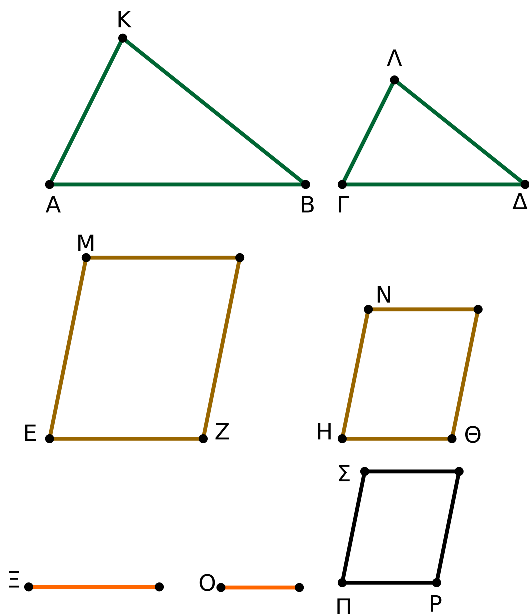
πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ **Β** τῷ **Γ**, ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει.

ἑκάτερον ἄρα τῶν **Α**, **Β** τῷ **Γ** ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει [ὥστε καὶ τὸ **Α** τῷ **Β** ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **Α** τῷ **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ′.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐτὰι αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, **ΕΖ**, **ΗΘ**, ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ **ΚΑΒ**, **ΛΓΔ**, ἀπὸ δὲ τῶν **ΕΖ**, **ΗΘ** ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ **ΜΖ**, **ΝΘ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ **ΚΑΒ** πρὸς τὸ **ΛΓΔ**, οὕτως τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΝΘ**.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν **ΑΒ**, **ΓΔ** τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ **ΕΖ**, **ΗΘ** τρίτη ἀνάλογον ἡ **Ο**. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**, ὡς δὲ ἡ **ΓΔ** πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ **ΗΘ** πρὸς τὴν **Ο**, δι᾿ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **Ο**. ἀλλ᾿ ὡς μὲν ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν Ξ, οὕτως [καὶ] τὸ **ΚΑΒ** πρὸς τὸ **ΛΓΔ**, ὡς δὲ ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **Ο**, οὕτως τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΝΘ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΚΑΒ** πρὸς τὸ **ΛΓΔ**, οὕτως τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΝΘ**.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ **ΚΑΒ** πρὸς τὸ **ΛΓΔ**, οὕτως τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΝΘ**· λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**, ἔστω ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΠΡ**, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΠΡ** ὁποτέρῳ τῶν **ΜΖ**, **ΝΘ** ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ **ΣΡ**.

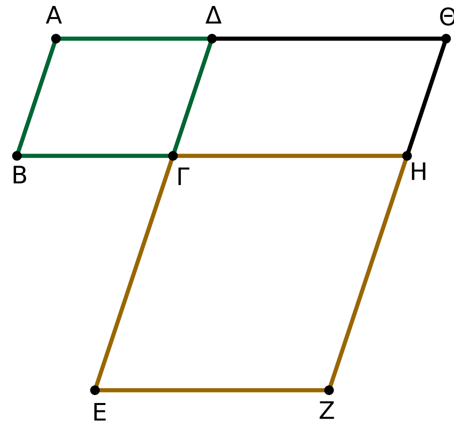
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΠΡ**, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ **ΚΑΒ**, **ΛΓΔ**, ἀπὸ δὲ τῶν **ΕΖ**, **ΠΡ** ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ **ΜΖ**, **ΣΡ**, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΚΑΒ** πρὸς τὸ **ΛΓΔ**, οὕτως τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΣΡ**. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ **ΚΑΒ** πρὸς τὸ **ΛΓΔ**, οὕτως τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΝΘ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΣΡ**, οὕτως τὸ **ΜΖ** πρὸς τὸ **ΝΘ**. τὸ **ΜΖ** ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν **ΝΘ**, **ΣΡ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΝΘ** τῷ **ΣΡ**. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ **ΗΘ** τῇ **ΠΡ**. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΠΡ**, ἴση δὲ ἡ **ΠΡ** τῇ **ΗΘ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾿ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ᾿ αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐτὰι αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγʹ.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ **ΑΓ**, **ΓΖ** ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ **ΒΓΔ** γωνίαν τῇ ὑπὸ **ΕΓΗ**· λέγω, ὅτι τὸ **ΑΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΖ** παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν **ΒΓ** τῇ **ΓΗ**· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ **ΔΓ** τῇ **ΓΕ**. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΔΗ** παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ **Κ**, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΗ**, οὕτως ἡ **Κ** πρὸς τὴν **Λ**, ὡς δὲ ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**, οὕτως ἡ **Λ** πρὸς τὴν **Μ**. Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε **Κ** πρὸς τὴν **Λ** καὶ τῆς **Λ** πρὸς τὴν **Μ** οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΗ** καὶ τῆς **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**. ἀλλ᾽ ὁ τῆς **Κ** πρὸς **Μ** λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς **Κ** πρὸς **Λ** λόγου καὶ τοῦ τῆς **Λ** πρὸς **Μ**· ὥστε καὶ ἡ **Κ** πρὸς τὴν **Μ** λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΗ**, οὕτως τὸ **ΑΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΘ**, ἀλλ᾽ ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΗ**, οὕτως ἡ **Κ** πρὸς τὴν **Λ**, καὶ ὡς ἄρα ἡ **Κ** πρὸς τὴν **Λ**, οὕτως τὸ **ΑΓ** πρὸς τὸ **ΓΘ**. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**, οὕτως τὸ **ΓΘ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΖ**, ἀλλ᾽ ὡς ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΕ**, οὕτως ἡ **Λ** πρὸς τὴν **Μ**, καὶ ὡς ἄρα ἡ **Λ** πρὸς τὴν **Μ**, οὕτως τὸ **ΓΘ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΖ** παραλληλόγραμμον.

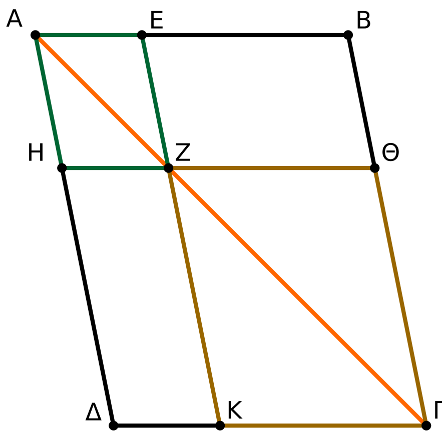
ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ **Κ** πρὸς τὴν **Λ**, οὕτως τὸ **ΑΓ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΘ** παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ **Λ** πρὸς τὴν **Μ**, οὕτως τὸ **ΓΘ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΓΖ** παραλληλόγραμμον, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **Κ** πρὸς τὴν **Μ**, οὕτως τὸ **ΑΓ** πρὸς τὸ **ΓΖ** παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ **Κ** πρὸς τὴν **Μ** λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ **ΑΓ** ἄρα πρὸς τὸ **ΓΖ** λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ **ΑΒΓΔ**, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ **ΑΓ**, περὶ δὲ τὴν **ΑΓ** παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ **ΕΗ**, **ΘΚ**· λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν **ΕΗ**, **ΘΚ** παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστι ὅλῳ τῷ **ΑΒΓΔ** καὶ ἀλλήλοις.



Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ **ΑΒΓ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΒΓ** ἦκται ἡ **ΕΖ**, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ **ΒΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**, οὕτως ἡ **ΓΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΑΓΔ** παρὰ μίαν τὴν **ΓΔ** ἦκται ἡ **ΖΗ**, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ **ΓΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**, οὕτως ἡ **ΔΗ** πρὸς τὴν **ΗΑ**.

ἀλλ᾽ ὡς ἡ **ΓΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ **ΒΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΒΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**, οὕτως ἡ **ΔΗ** πρὸς τὴν **ΗΑ**, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς **ΑΕ**, οὕτως ἡ **ΔΑ** πρὸς **ΑΗ**, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως ἡ **ΕΑ** πρὸς τὴν **ΑΗ**.

τῶν ἄρα **ΑΒΓΔ**, **ΕΗ** παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ **ΒΑΔ**. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΗΖ** τῇ **ΔΓ**, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΖΗ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΓΑ**· καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν **ΑΔΓ**, **ΑΗΖ** ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ** γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΗΖ** τριγώνῳ.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΑΓΒ** τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ **ΑΖΕ** τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΗ** παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΔ** πρὸς τὴν **ΔΓ**, οὕτως ἡ **ΑΗ** πρὸς τὴν **ΗΖ**, ὡς δὲ ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΑ**, οὕτως ἡ **ΗΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**, ὡς δὲ ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΓΒ**, οὕτως ἡ **ΑΖ** πρὸς τὴν **ΖΕ**, καὶ ἔτι ὡς ἡ **ΓΒ** πρὸς τὴν **ΒΑ**, οὕτως ἡ **ΖΕ** πρὸς τὴν **ΕΑ**. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΑ**, οὕτως ἡ **ΗΖ** πρὸς τὴν **ΖΑ**, ὡς δὲ ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΓΒ**, οὕτως ἡ **ΑΖ** πρὸς τὴν **ΖΕ**, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΒ**, οὕτως ἡ **ΗΖ** πρὸς τὴν **ΖΕ**.

τῶν ἄρα **ΑΒΓΔ**, **ΕΗ** παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΗ** παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον καὶ τῷ **ΚΘ** παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν **ΕΗ**, **ΘΚ** παραλ-

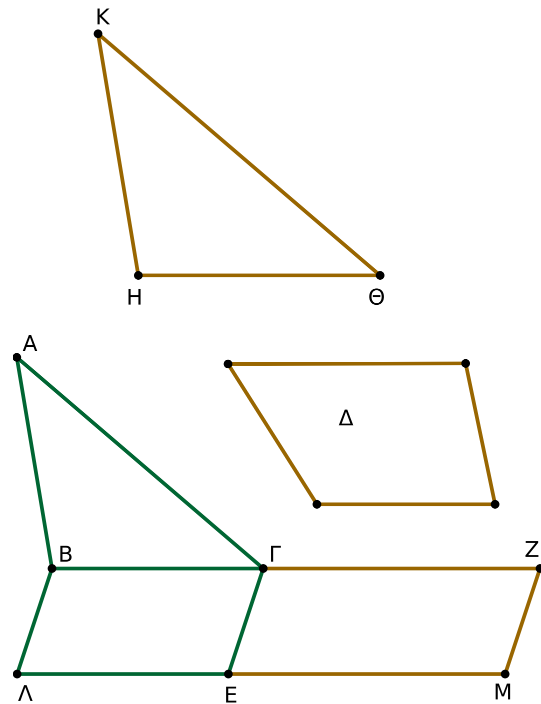
ληλογράμμων τῷ **ΑΒΓΔ** [παραλληλογράμμῳ] ὅμοιόν ἐστιν. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ **ΕΗ** ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ **ΘΚ** παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ **ΑΒΓ**, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ **Δ**· δεῖ δὴ τῷ μὲν **ΑΒΓ** ὅμοιον, τῷ δὲ **Δ** ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν **ΒΓ** τῷ **ΑΒΓ** τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ **ΒΕ**, παρὰ δὲ τὴν **ΓΕ** τῷ **Δ** ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ **ΓΜ** ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΓΕ**, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ **ΓΒΛ**. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν **ΒΓ** τῇ **ΓΖ**, ἡ δὲ **ΛΕ** τῇ **ΕΜ**. καὶ εἰλήφθω τῶν **ΒΓ**, **ΓΖ** μέση ἀνάλογον ἡ **ΗΘ**, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΗΘ** τῷ **ΑΒΓ** ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ **ΚΗΘ**.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΗΘ**, οὕτως ἡ **ΗΘ** πρὸς τὴν **ΓΖ**, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΖ**, οὕτως τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΚΗΘ** τρίγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΖ**, οὕτως τὸ **ΒΕ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΕΖ** παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΚΗΘ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΒΕ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΕΖ** παραλληλόγραμμον·

ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΒΕ** παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ **ΚΗΘ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΕΖ** παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΒΕ** παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ **ΚΗΘ** τρίγωνον τῷ **ΕΖ**

παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ **ΕΖ** παραλληλόγραμμον τῷ **Δ** ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ **ΚΗΘ** ἄρα τῷ **Δ** ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ **ΚΗΘ** καὶ τῷ **ΑΒΓ** ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **ΑΒΓ** ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ **Δ** ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ **ΚΗΘ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κϛʹ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ **ΑΖ** ὅμοιον τῷ **ΑΒΓΔ** καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ **ΔΑΒ**· λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ** τῷ **ΑΖ**.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ **ΑΘΓ**, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ **ΗΖ** διήχθω ἐπὶ τὸ **Θ**, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ **Θ** ὁπορέρᾳ τῶν **ΑΔ**, **ΒΓ** παράλληλος ἡ **ΘΚ**.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔ** τῷ **ΚΗ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΔΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**, οὕτως ἡ **ΗΑ** πρὸς τὴν **ΑΚ**. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΑΒΓΔ**, **ΕΗ** καὶ ὡς ἡ **ΔΑ** πρὸς τὴν **ΑΒ**, οὕτως ἡ **ΗΑ** πρὸς τὴν **ΑΕ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΗΑ** πρὸς τὴν **ΑΚ**, οὕτως ἡ **ΗΑ** πρὸς τὴν **ΑΕ**. ἡ **ΗΑ** ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΑΚ**, **ΑΕ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΑΚ** ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὔκ ἐστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ **ΑΒΓΔ** τῷ **ΑΖ**· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ **ΑΒΓΔ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΑΖ** παραλληλογράμμῳ.

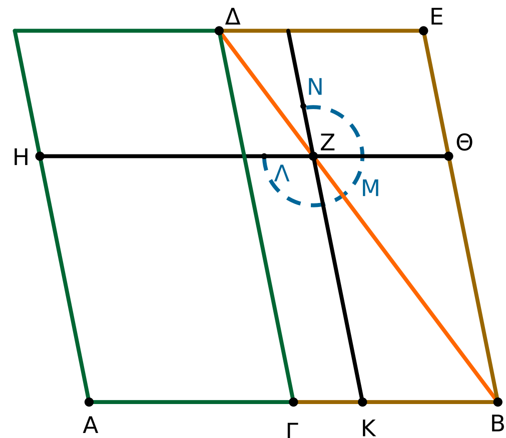
Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμμαντι.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ **ΑΒ** καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Γ**, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν **ΑΒ** εὐθεῖαν τὸ **ΑΔ** παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ **ΔΒ** ἀναγραφέντι ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς **ΑΒ**, τουτέστι τῆς **ΓΒ**· λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν **ΑΒ** παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι [παραλληλογράμμοις] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ **ΔΒ** μέγιστόν ἐστι τὸ **ΑΔ**.

παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν **ΑΒ** εὐθεῖαν τὸ **ΑΖ** παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ **ΖΒ** ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ **ΔΒ**· λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ **ΑΔ** τοῦ **ΑΖ**.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΔΒ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΖΒ** παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ **ΔΒ**, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

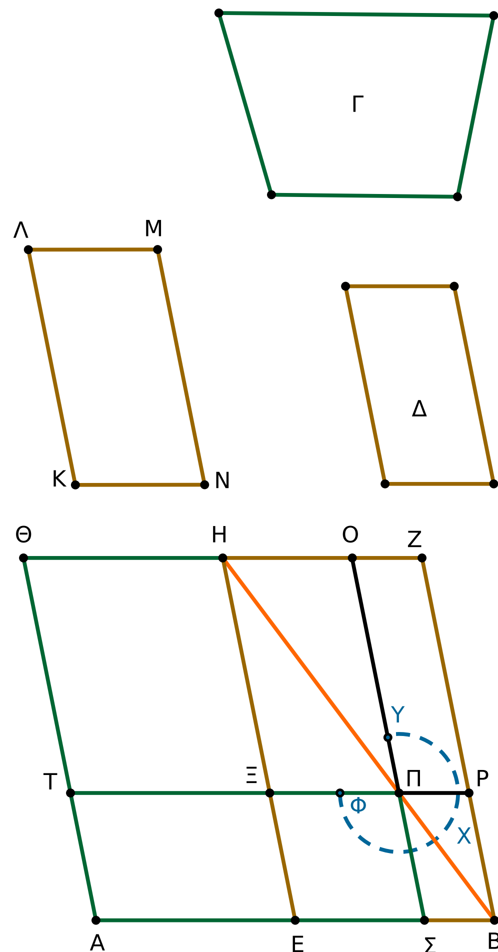
Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ **ΓΖ** τῷ **ΖΕ**, κοινὸν δὲ τὸ **ΖΒ**, ὅλον ἄρα τὸ **ΓΘ** ὅλῳ τῷ **ΚΕ** ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ **ΓΘ** τῷ **ΓΗ** ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΒ**. καὶ τὸ **ΗΓ** ἄρα τῷ **ΕΚ** ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΓΖ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΖ** τῷ **ΛΜΝ** γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε τὸ **ΔΒ** παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ **ΑΔ**, τοῦ **ΑΖ** παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν].

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν **ΑΒ** παραβαλεῖν, τὸ **Γ** μὴ μεῖζον [ὂν] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς **ΑΒ** ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ **Δ**· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν **ΑΒ** τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **Γ** ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ **Δ**.



Τετμήσθω ἡ **ΑΒ** δίχα κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον, καὶ ἀνα γεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΕΒ** τῷ **Δ** ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ **ΕΒΖΗ**, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΑΗ** παραλληλόγραμμον.

Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΗ** τῷ **Γ**, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν **ΑΒ** τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **Γ** ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ **ΑΗ** ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ **ΗΒ** ὁμοίῳ ὄντι τῷ **Δ**.

εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἔστω τὸ **ΘΕ** τοῦ **Γ**. ἴσον δὲ τὸ **ΘΕ** τῷ **ΗΒ**· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ **ΗΒ** τοῦ **Γ**. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ **ΗΒ** τοῦ **Γ**, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ **Δ** ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ **ΚΛΜΝ**.

ἀλλὰ τὸ **Δ** τῷ **ΗΒ** [ἐστιν] ὅμοιον· καὶ τὸ **ΚΜ** ἄρα τῷ **ΗΒ** ἐστιν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν **ΚΛ** τῇ **ΗΕ**, ἡ δὲ **ΛΜ** τῇ **ΗΖ**. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ

τὸ **ΗΒ** τοῖς **Γ**, **ΚΜ**, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΗΒ** τοῦ **ΚΜ**· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν **ΗΕ** τῆς **ΚΛ**, ἡ δὲ **ΗΖ** τῆς **ΛΜ**.

κείσθω τῇ μὲν **ΚΛ** ἴση ἡ **ΗΞ**, τῇ δὲ **ΛΜ** ἴση ἡ **ΗΟ**, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΞΗΟΠ** παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστι [τὸ **ΗΠ**] τῷ **ΚΜ** [ἀλλὰ τὸ **ΚΜ** τῷ **ΗΒ** ὅμοιόν ἐστιν]. καὶ τὸ **ΗΠ** ἄρα τῷ **ΗΒ** ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ **ΗΠ** τῷ **ΗΒ**. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ **ΗΠΒ**, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ **ΒΗ** τοῖς **Γ**, **ΚΜ**, ὧν τὸ **ΗΠ** τῷ **ΚΜ** ἐστιν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ **ΥΧΦ** γνόμων λοιπῷ τῷ **Γ** ἴσος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΟΡ** τῷ **ΞΣ**, κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΠΒ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΟΒ** ὅλῳ τῷ **ΞΒ** ἴσον ἐστίν.

ἀλλὰ τὸ **ΞΒ** τῷ **ΤΕ** ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ **ΑΕ** πλευρᾷ τῇ **ΕΒ** ἐστιν ἴση· καὶ τὸ **ΤΕ** ἄρα τῷ **ΟΒ** ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΞΣ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΤΣ** ὅλῳ τῷ **ΦΧΥ** γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλ' ὁ **ΦΧΥ** γνώμων τῷ **Γ** ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ **ΤΣ** ἄρα τῷ **Γ** ἐστιν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν **ΑΒ** τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **Γ** ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ **ΣΤ** ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ **ΠΒ** ὁμοίῳ ὄντι τῷ **Δ** [ἐπειδήπερ τὸ **ΠΒ** τῷ **ΗΠ** ὅμοιόν ἐστιν]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κθ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν **ΑΒ** παραβαλεῖν, τὸ **Γ**, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ **Δ**· δεῖ δὴ παρὰ τὴν **ΑΒ** εὐθεῖαν τῷ **Γ** εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ **Δ**.

Τετμήσθω ἡ **ΑΒ** δίχα κατὰ τὸ **Ε**, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τὴς **ΕΒ** τῷ **Δ** ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ **ΒΖ**, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς **ΒΖ**, **Γ** ἴσον, τῷ δὲ **Δ** ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ **ΗΘ**. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν **ΚΘ** τῇ **ΖΛ**, ἡ δὲ **ΚΗ** τῇ **ΖΕ**.

καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ **ΗΘ** τοῦ **ΖΒ**, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν **ΚΘ** τῆς **ΖΛ**, ἡ δὲ **ΚΗ** τῇ **ΖΕ**.

ἐκβεβλήσθωσαν αἱ **ΖΛ**, **ΖΕ**, καὶ τῇ μὲν **ΚΘ** ἴση ἔστω ἡ **ΖΛΜ**, τῇ δὲ **ΚΗ** ἴση ἡ **ΖΕΝ**, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΜΝ**·

τὸ **ΜΝ** ἄρα τῷ **ΗΘ** ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ **ΗΘ** τῷ **ΕΛ** ἐστιν ὅμοιον· καὶ τὸ **ΜΝ** ἄρα τῷ **ΕΛ** ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ **ΕΛ** τῷ **ΜΝ**. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ **ΖΞ**, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΗΘ** τοῖς **ΕΛ**, **Γ**, ἀλλὰ τὸ **ΗΘ** τῷ **ΜΝ** ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ **ΜΝ** ἄρα τοῖς **ΕΛ**, **Γ** ἴσον ἐστίν. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ **ΕΛ**· λοιπὸς ἄρα ὁ **ΨΧΦ** γνώμων τῷ **Γ** ἐστιν ἴσος.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΕΒ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ **ΑΝ** τῷ **ΝΒ**, τουτέστι τῷ **ΛΟ**. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΕΞ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΞ** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΦΧΨ** γνώμονι. ἀλλὰ ὁ **ΦΧΨ** γνώμων τῷ **Γ** ἴσος ἐστίν· καὶ τὸ **ΑΞ** ἄρα τῷ **Γ** ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν **ΑΒ** τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ **Γ** ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ **ΑΞ** ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ **ΠΟ** ὁμοίῳ ὄντι τῷ **Δ**, ἐπεὶ καὶ τῷ **ΕΛ** ἐστιν ὅμοιον τὸ **ΟΠ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λ΄.

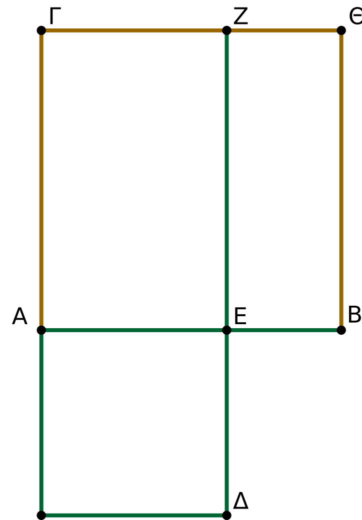
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ **ΑΒ**· δεῖ δὴ τὴν **ΑΒ** εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΒΓ**, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν **ΑΓ** τῷ **ΒΓ** ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ **ΓΔ** ὑπερβάλλον εἴδει τῷ **ΑΔ** ὁμοίῳ τῷ **ΒΓ**.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ **ΒΓ**· τετράγωνον ἄρα ἐστι καὶ τὸ **ΑΔ**.

καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΒΓ** τῷ **ΓΔ**, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ **ΓΕ**· λοιπὸν ἄρα τὸ **ΒΖ** λοιπῷ τῷ **ΑΔ** ἐστιν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον·



τῶν **ΒΖ**, **ΑΔ** ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΖΕ** πρὸς τὴν **ΕΔ**, οὕτως ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν **ΕΒ**.

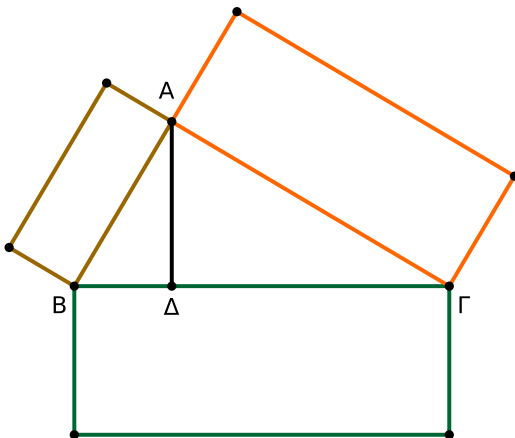
ἴση δὲ ἡ μὲν **ΖΕ** τῇ **ΑΒ**, ἡ δὲ **ΕΔ** τῇ **ΑΕ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΕ**, οὕτως ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν **ΕΒ**.

μείζων δὲ ἡ **ΑΒ** τῆς **ΑΕ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΑΕ** τῆς **ΕΒ**.

Ἡ ἄρα **ΑΒ** εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Ε**, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ **ΑΕ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λα΄.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.



Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ **ΑΒΓ** ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἤχθω κάθετος ἡ **ΑΔ**. Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ **ΑΒΓ** ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ **Α** ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν **ΒΓ** βάσιν κάθετος ἦκται ἡ **ΑΔ**, τὰ **ΑΒΔ**, **ΑΔΓ** πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ **ΑΒΓ** καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τῷ **ΑΒΔ**,

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΓΒ** πρὸς τὴν **ΒΑ**, οὕτως ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΔ**.

καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὡς ἄρα ἡ **ΓΒ** πρὸς τὴν **ΒΔ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ** εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

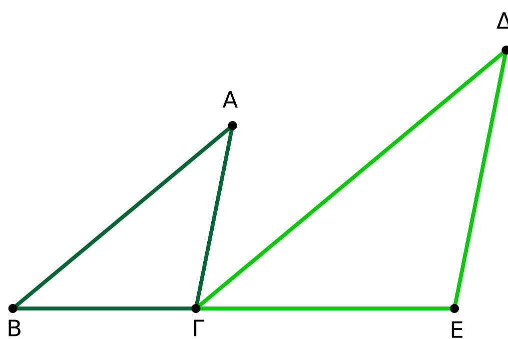
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΑ**. ὥστε καὶ ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὰς **ΒΔ**, **ΔΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ **ΒΓ** ταῖς **ΒΔ**, **ΔΓ**· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἄπὸ τῆς **ΒΓ** εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΓΕ** τὰς δύο πλευρὰς τὰς **ΒΑ**, **ΑΓ** ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς **ΔΓ**, **ΔΕ** ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως τὴν **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΔΕ**, παράλληλον δὲ τὴν μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΓ**, τὴν δὲ **ΑΓ** τῇ **ΔΕ**· λέγω, ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΓΕ**.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΓ**, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ **ΑΓ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΓΔ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΔΕ** τῇ ὑπὸ **ΑΓΔ** ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΓΔΕ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΓΕ** μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ **Α** μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ **Δ** ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως τὴν **ΓΔ** πρὸς τὴν **ΔΕ**, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΓΕ** τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ

ὑπὸ **ΔΓΕ**.

ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΓΔ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΓ** ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΕ** δυσὶ ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΑΓ** ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΓΕ**, **ΑΓΒ** ταῖς ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΓΒ**, **ΓΒΑ** ἴσαι εἰσίν.

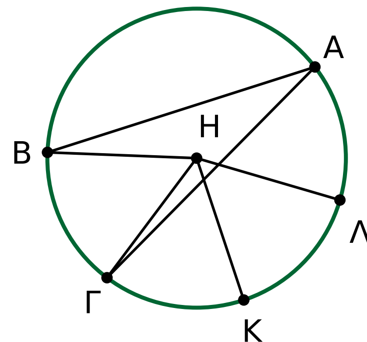
ἀλλ' αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΑΒΓ**, **ΑΓΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ **ΑΓΕ**, **ΑΓΒ** ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ **ΑΓ** καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Γ** δύο εὐθεῖαι αἱ **ΒΓ**, **ΓΕ** μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνάις τὰς ὑπὸ **ΑΓΕ**, **ΑΓΒ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΓΕ**.

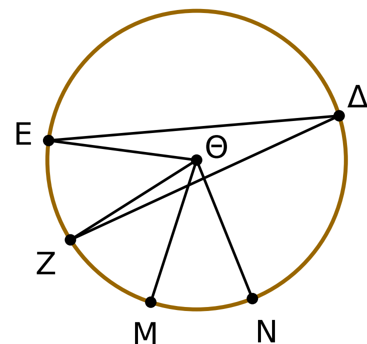
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγʹ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς **Η**, **Θ** γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ **ΒΗΓ**, **ΕΘΖ**, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΓ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΕΖ** περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ **ΕΘΖ** καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** πρὸς τὴν ὑπὸ **ΕΔΖ**.





Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν **ΒΓ** περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ **ΓΚ**, **ΚΛ**, τῇ δὲ **ΕΖ** περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ **ΖΜ**, **ΜΝ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΗΚ**, **ΗΛ**, **ΘΜ**, **ΘΝ**.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ **ΒΓ**, **ΓΚ**, **ΚΛ** περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ **ΒΗΓ**, **ΓΗΚ**, **ΚΗΛ** γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΛ** περιφέρεια τῆς **ΒΓ**, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΗΛ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΒΗΓ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ **ΝΕ** περιφέρεια τῆς **ΕΖ**, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΝΘΕ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΘΖ**. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΛ** περιφέρεια τῇ **ΕΝ** περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΒΗΛ** τῇ ὑπὸ **ΕΘΝ**, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ **ΒΛ** περιφέρεια τῆς **ΕΝ** περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΗΛ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΘΝ**, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων.

τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν **ΒΓ**, **ΕΖ**, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ **ΒΗΓ**, **ΕΘΖ**, εἴληπται τῆς μὲν **ΒΓ** περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων ἥ τε **ΒΛ** περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΗΛ** γωνία, τῆς δὲ **ΕΖ** περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ **ΕΘΖ** γωνίας ἥ τε **ΕΝ** περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΘΝ** γωνία.

καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ **ΒΛ** περιφέρεια τῆς **ΕΝ** περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΗΛ** γωνία τῆς ὑπο **ΕΘΝ** γωνίας, καὶ εἰ ἴση, ἴση, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ **ΒΓ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΕΖ**, οὕτως ἡ ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ **ΕΘΖ**. ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ **ΕΘΖ**, οὕτως ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** πρὸς τὴν ὑπὸ **ΕΔΖ**. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΒΓ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΕΖ** περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ **ΒΗΓ** γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ **ΕΘΖ** καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** πρὸς τὴν ὑπὸ **ΕΔΖ**.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 7

Ὅροι

αʹ. Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

βʹ. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γʹ. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

δʹ. Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

εʹ. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

ϛʹ. Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

ζʹ. Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

ηʹ. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

θʹ. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ιʹ. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ιαʹ. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

ιβʹ. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιγʹ. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

ιδʹ. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιεʹ. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

ιϛʹ. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιζʹ. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιηʹ. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

ιθʹ. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κʹ. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

καʹ. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

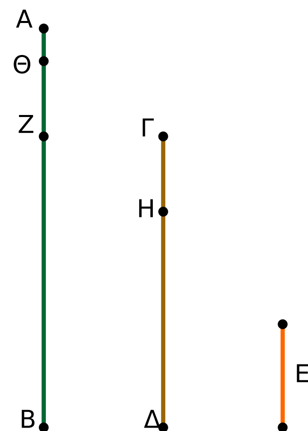
κβʹ. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

αʹ.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ [ἀνίσων] ἀριθμῶν τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς· λέγω, ὅτι οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τουτέστιν ὅτι τοὺς **ΑΒ**, **ΓΔ** μονὰς μόνη μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Ε**· καὶ ὁ μὲν **ΓΔ** τὸν **ΒΖ** μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν **ΖΑ**, ὁ δὲ **ΑΖ** τὸν **ΔΗ** μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν **ΗΓ**, ὁ δὲ **ΗΓ** τὸν **ΖΘ** μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν **ΘΑ**.



Ἐπεὶ οὖν ὁ **Ε** τὸν **ΓΔ** μετρεῖ, ὁ δὲ **ΓΔ** τὸν **ΒΖ** μετρεῖ, καὶ ὁ **Ε** ἄρα τὸν **ΒΖ** μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν **ΒΑ**· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν **ΑΖ** μετρήσει.

ὁ δὲ **ΑΖ** τὸν **ΔΗ** μετρεῖ· καὶ ὁ **Ε** ἄρα τὸν **ΔΗ** μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν **ΔΓ**· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν **ΓΗ** μετρήσει.

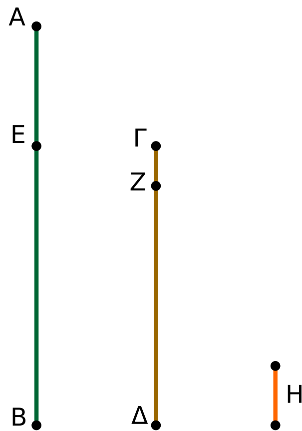
ὁ δὲ **ΓΗ** τὸν **ΖΘ** μετρεῖ· καὶ ὁ **Ε** ἄρα τὸν **ΖΘ** μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν **ΖΑ**· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν **ΑΘ** μονάδα μετρήσει ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα τοὺς **ΑΒ**, **ΓΔ** ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**. δεῖ δὴ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.



Εἰ μὲν οὖν ὁ **ΓΔ** τὸν **ΑΒ** μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ **ΓΔ** ἄρα τῶν **ΓΔ**, **ΑΒ** κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ **ΓΔ** τὸν **ΓΔ** μετρήσει.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ **ΓΔ** τὸν **ΑΒ**, τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειφθήσεταί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται· εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. λειφθήσεταί τις ἄρα ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν **ΓΔ** τὸν **ΒΕ** μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν **ΕΑ**, ὁ δὲ **ΕΑ** τὸν **ΔΖ** μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν **ΖΓ**, ὁ δὲ **ΓΖ** τὸν **ΑΕ** μετρείτω.

ἐπεὶ οὖν ὁ **ΓΖ** τὸν **ΑΕ** μετρεῖ, ὁ δὲ **ΑΕ** τὸν **ΔΖ** μετρεῖ, καὶ ὁ **ΓΖ** ἄρα τὸν **ΔΖ** μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν **ΓΔ** μετρήσει. ὁ δὲ **ΓΔ** τὸν **ΒΕ** μετρεῖ· καὶ ὁ **ΓΖ** ἄρα τὸν **ΒΕ** μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **ΕΑ**· καὶ ὅλον ἄρα τὸν **ΒΑ** μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **ΓΔ**· ὁ **ΓΖ** ἄρα τοὺς **ΑΒ**, **ΓΔ** μετρεῖ. ὁ **ΓΖ** ἄρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** κοινὸν μέτρον ἐστίν.

λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ **ΓΖ** τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς **ΑΒ**, **ΓΔ** ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ **ΓΖ**. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Η**.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Η** τὸν **ΓΔ** μετρεῖ, ὁ δὲ **ΓΔ** τὸν **ΒΕ** μετρεῖ, καὶ ὁ **Η** ἄρα τὸν **ΒΕ** μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν **ΒΑ**· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν **ΑΕ** μετρήσει. ὁ δὲ **ΑΕ** τὸν **ΔΖ** μετρεῖ· καὶ ὁ **Η** ἄρα τὸν **ΔΖ** μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν **ΔΓ**· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν **ΓΖ** μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον·

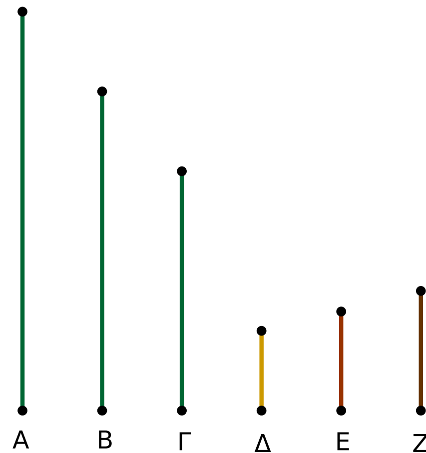
οὐκ ἄρα τοὺς **ΑΒ**, **ΓΔ** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ **ΓΖ**· ὁ **ΓΖ** ἄρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ **Α**, **Β**, **Γ**· δεῖ δὴ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν **Α**, **Β** τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ **Δ**· ὁ δὴ **Δ** τὸν **Γ** ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ.



μετρείτω πρότερον· μετρεῖ δέ καὶ τοὺς **Α**, **Β**· ὁ **Δ** ἄρα τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖ· ὁ **Δ** ἄρα τῶν **Α**, **Β**, **Γ** κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον.

εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ **Δ** τῶν **Α**, **Β**, **Γ** μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ **Δ**. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Ε**. ἐπεὶ οὖν ὁ **Ε** τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖ, καὶ τοὺς **Α**, **Β** ἄρα μετρήσει· καὶ τὸ τῶν **Α**, **Β** ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν **Α**, **Β** μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ **Δ**· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ **Δ**· ὁ **Δ** ἄρα τῶν **Α**, **Β**, **Γ** μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ **Δ** τὸν **Γ**· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ **Γ**, **Δ** οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ἐπεὶ γὰρ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. ὁ δὴ τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** μετρῶν καὶ τοὺς **Α**, **Β** μετρήσει, καὶ τὸ τῶν **Α**, **Β** μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸν **Δ** μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **Γ**· τοὺς **Δ**, **Γ** ἄρα ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ **Δ**, **Γ** ἄρα οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ **Ε**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** μετρεῖ, ὁ δὲ **Δ** τοὺς **Α**, **Β** μετρεῖ, καὶ ὁ **Ε** ἄρα τοὺς **Α**, **Β** μετρεῖ· μετρεῖ δὲ

καὶ τὸν **Γ**· ὁ **Ε** ἄρα τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖ. ὁ **Ε** ἄρα τῶν **Α**, **Β**, **Γ** κοινόν ἐστι μέτρον.

λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ **Ε** τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ **Ε**. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Ζ**.

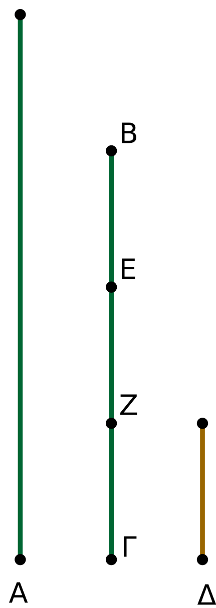
καὶ ἐπεὶ ὁ **Ζ** τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖ, καὶ τοὺς **Α**, **Β** μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν **Α**, **Β** ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν **Α**, **Β** μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ **Δ**· ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **Γ**· ὁ **Ζ** ἄρα τοὺς **Δ**, **Γ** μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν **Δ**, **Γ** ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν **Δ**, **Γ** μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ **Ε**· ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Ε** μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ **Ε**· ὁ **Ε** ἄρα τῶν **Α**, **Β**, **Γ** μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δʹ.

Ἅπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **ΒΓ**, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ὁ **ΒΓ** τοῦ **Α** ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.



Οἱ **Α**, **ΒΓ** γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ **Α**, **ΒΓ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. διαιρεθέντος δὴ τοῦ **ΒΓ** εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ **ΒΓ** μέρος τι τοῦ **Α**· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ **ΒΓ** τοῦ **Α**.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ **Α**, **ΒΓ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὴ **ΒΓ** τὸν **Α** ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. εἰ μὲν οὖν ὁ **ΒΓ** τὸν **Α** μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ **ΒΓ** τοῦ **Α**.

εἰ δὲ οὔ, εἰλήφθω τῶν **Α**, **ΒΓ** μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ **Δ**, καὶ διῃρήσθω ὁ **ΒΓ** εἰς τοὺς τῷ **Δ** ἴσους τοὺς **ΒΕ**, **ΕΖ**, **ΖΓ**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** τὸν **Α** μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ **Δ** τοῦ **Α**· ἴσος δὲ ὁ **Δ** ἑκάστῳ τῶν **ΒΕ**, **ΕΖ**, **ΖΓ**· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν **ΒΕ**, **ΕΖ**, **ΖΓ** τοῦ **Α** μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ **ΒΓ** τοῦ **Α**.

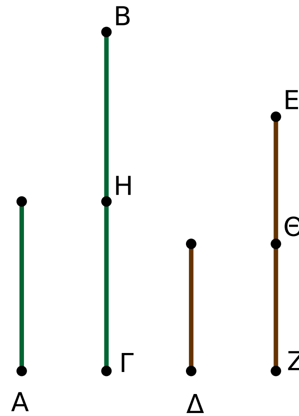
Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **Α** [ἀριθμοῦ] τοῦ **ΒΓ** μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ **Δ** ἑτέρου τοῦ **ΕΖ** τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ **Α** τοῦ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ **Α**, **Δ** συναμφοτέρου τοῦ **ΒΓ**, **ΕΖ** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ **Α** τοῦ **ΒΓ**.

Ἐπεὶ γάρ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **ΒΓ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Δ** τοῦ **ΕΖ**, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ **ΒΓ** ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ **Α**, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ **ΕΖ** ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ **Δ**.



διῃρήσθω ὁ μὲν **ΒΓ** εἰς τοὺς τῷ **Α** ἴσους τοὺς **ΒΗ**, **ΗΓ**, ὁ δὲ **ΕΖ** εἰς τοὺς τῷ **Δ** ἴσους τοὺς **ΕΘ**, **ΘΖ**· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΒΗ**, **ΗΓ** τῷ πλήθει τῶν **ΕΘ**, **ΘΖ**.

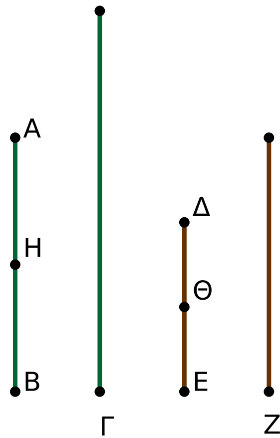
καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν **ΒΗ** τῷ **Α**, ὁ δὲ **ΕΘ** τῷ **Δ**, καὶ οἱ **ΒΗ**, **ΕΘ** ἄρα τοῖς **Α**, **Δ** ἴσοι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ **ΗΓ**, **ΘΖ** τοῖς **Α**, **Δ**. ὅσοι ἄρα [εἰσὶν] ἐν τῷ **ΒΓ** ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ **Α**, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς **ΒΓ**, **ΕΖ** ἴσοι τοῖς **Α**, **Δ**. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ **ΒΓ** τοῦ **Α**, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ **ΒΓ**, **ΕΖ** συναμφοτέρου τοῦ **Α**, **Δ**.

ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **ΒΓ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ **Α**, **Δ** συναμφοτέρου τοῦ **ΒΓ**, **ΕΖ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **ΑΒ** ἀριθμοῦ τοῦ **Γ** μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ **ΔΕ** ἑτέρου τοῦ **Ζ** τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ **ΑΒ** τοῦ **Γ**· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ **ΑΒ**, **ΔΕ** συναμφοτέρου τοῦ **Γ**, **Ζ** τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ **ΑΒ** τοῦ **Γ**.



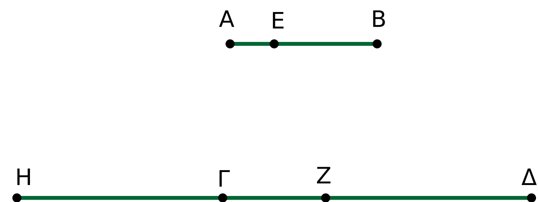
Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ **ΑΒ** τοῦ **Γ**, τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ **ΔΕ** τοῦ **Ζ**, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΑΒ** μέρη τοῦ **Γ**, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ **ΔΕ** μέρη τοῦ **Ζ**. διῃρήσθω ὁ μὲν **ΑΒ** εἰς τὰ τοῦ **Γ** μέρη τὰ **ΑΗ**, **ΗΒ**, ὁ δὲ **ΔΕ** εἰς τὰ τοῦ **Ζ** μέρη τὰ **ΔΘ**, **ΘΕ**·

ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΑΗ**, **ΗΒ** τῷ πλήθει τῶν **ΔΘ**, **ΘΕ**. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΗ** τοῦ **Γ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΔΘ** τοῦ **Ζ**, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΗ** τοῦ **Γ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ **ΑΗ**, **ΔΘ** συναμφοτέρου τοῦ **Γ**, **Ζ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΗΒ** τοῦ **Γ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ **ΗΒ**, **ΘΕ** συναμφοτέρου τοῦ **Γ**, **Ζ**. ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ **ΑΒ** τοῦ **Γ**, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ **ΑΒ**, **ΔΕ** συναμφοτέρου τοῦ **Γ**, **Ζ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **ΑΒ** ἀριθμοῦ τοῦ **ΓΔ** μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ **ΑΕ** ἀφαιρεθέντος τοῦ **ΓΖ**· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ **ΕΒ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ **ΑΒ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**.



Ὃ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ **ΕΒ** τοῦ **ΓΗ**. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΕΒ** τοῦ **ΓΗ**, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΗΖ**.

ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ**· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΗΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τοῦ **ΓΔ**· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ **ΗΖ** τῷ **ΓΔ**. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ **ΓΖ**· λοιπὸς ἄρα ὁ **ΗΓ** λοιπῷ τῷ **ΖΔ** ἐστιν ἴσος.

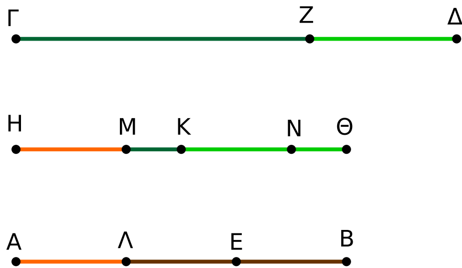
καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος [ἐστὶ] καὶ ὁ **ΕΒ** τοῦ **ΗΓ**, ἴσος δὲ ὁ **ΗΓ** τῷ **ΖΔ**, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΕΒ** τοῦ **ΖΔ**.

ἀλλὰ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ**· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ **ΕΒ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ **ΑΒ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **ΑΒ** ἀριθμοῦ τοῦ **ΓΔ** μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ **ΑΕ** ἀφαιρεθέντος τοῦ **ΓΖ**· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ **ΕΒ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ **ΑΒ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**.



Κείσθω γὰρ τῷ **ΑΒ** ἴσος ὁ **ΗΘ**, ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ **ΗΘ** τοῦ **ΓΔ**, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ**.

διῃρήσθω ὁ μὲν **ΗΘ** εἰς τὰ τοῦ **ΓΔ** μέρη τὰ **ΗΚ**, **ΚΘ**, ὁ δὲ **ΑΕ** εἰς τὰ τοῦ **ΓΖ** μέρη τὰ **ΑΛ**, **ΛΕ**· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΗΚ**, **ΚΘ** τῷ πλήθει τῶν **ΑΛ**, **ΛΕ**. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΗΚ** τοῦ **ΓΔ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΑΛ** τοῦ **ΓΖ**, μείζων δὲ ὁ **ΓΔ** τοῦ **ΓΖ**, μείζων ἄρα καὶ ὁ **ΗΚ** τοῦ **ΑΛ**.

κείσθω τῷ **ΑΛ** ἴσος ὁ **ΗΜ**. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΗΚ** τοῦ **ΓΔ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΗΜ** τοῦ **ΓΖ**· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ **ΜΚ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ **ΗΚ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**.

πάλιν ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΚΘ** τοῦ **ΓΔ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΕΛ** τοῦ **ΓΖ**, μείζων δὲ ὁ **ΓΔ** τοῦ **ΓΖ**, μείζων ἄρα καὶ ὁ **ΘΚ** τοῦ **ΕΛ**.

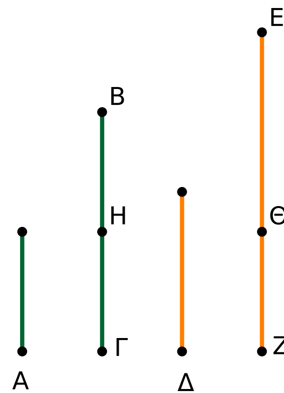
κείσθω τῷ **ΕΛ** ἴσος ὁ **ΚΝ**. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΚΘ** τοῦ **ΓΔ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΚΝ** τοῦ **ΓΖ**· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ **ΝΘ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ **ΚΘ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ λοιπὸς ὁ **ΜΚ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὸ αὐτὸ μέρος ὤν, ὅπερ ὅλος ὁ **ΗΚ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ **ΜΚ**, **ΝΘ** τοῦ **ΔΖ** τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ **ΘΗ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**.

ἴσος δὲ συναμφότερος μὲν ὁ **ΜΚ**, **ΝΘ** τῷ **ΕΒ**, ὁ δὲ **ΘΗ** τῷ **ΒΑ**· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ **ΕΒ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ **ΑΒ** ὅλου τοῦ **ΓΔ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **Α** ἀριθμοῦ τοῦ **ΒΓ** μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ **Δ** ἑτέρου τοῦ **ΕΖ** τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ **Α** τοῦ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **Δ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΒΓ** τοῦ **ΕΖ** ἢ μέρη.



Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **ΒΓ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Δ** τοῦ **ΕΖ**, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ **ΒΓ** ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ **Α**, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ **ΕΖ** ἴσοι τῷ **Δ**.

διῃρήσθω ὁ μὲν **ΒΓ** εἰς τοὺς τῷ **Α** ἴσους τοὺς **ΒΗ**, **ΗΓ**, ὁ δὲ **ΕΖ** εἰς τοὺς τῷ **Δ** ἴσους τοὺς **ΕΘ**, **ΘΖ**· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΒΗ**, **ΗΓ** τῷ πλήθει τῶν **ΕΘ**, **ΘΖ**.

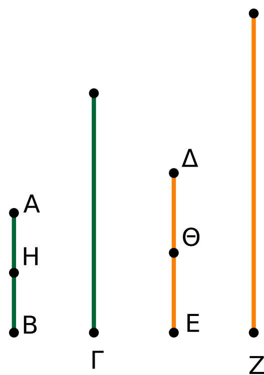
Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ **ΒΗ**, **ΗΓ** ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ **ΕΘ**, **ΘΖ** ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΒΗ**, **ΗΓ** τῷ πλήθει τῶν **ΕΘ**, **ΘΖ**, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΒΗ** τοῦ **ΕΘ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΗΓ** τοῦ **ΘΖ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη·

ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΒΗ** τοῦ **ΕΘ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ **ΒΓ** συναμφοτέρου τοῦ **ΕΖ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἴσος δὲ ὁ μὲν **ΒΗ** τῷ **Α**, ὁ δὲ **ΕΘ** τῷ **Δ**· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **Δ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΒΓ** τοῦ **ΕΖ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιʹ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **ΑΒ** ἀριθμοῦ τοῦ **Γ** μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ **ΔΕ** ἑτέρου τοῦ **Ζ** τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΔΕ** ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Ζ** ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.



Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ **ΑΒ** τοῦ **Γ**, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ **ΔΕ** τοῦ **Ζ**, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΑΒ** μέρη τοῦ **Γ**, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ **ΔΕ** μέρη τοῦ **Ζ**.

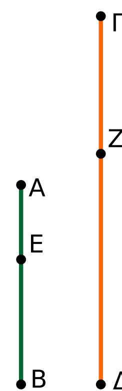
διῃρήσθω ὁ μὲν **ΑΒ** εἰς τὰ τοῦ **Γ** μέρη τὰ **ΑΗ**, **ΗΒ**, ὁ δὲ **ΔΕ** εἰς τὰ τοῦ **Ζ** μέρη τὰ **ΔΘ**, **ΘΕ**· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΑΗ**, **ΗΒ** τῷ πλήθει τῶν **ΔΘ**, **ΘΕ**. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΗ** τοῦ **Γ**, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΔΘ** τοῦ **Ζ**, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΗ** τοῦ **ΔΘ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Ζ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΗΒ** τοῦ **ΘΕ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Ζ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη·

ὥστε καί [ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΗ** τοῦ **ΔΘ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΗΒ** τοῦ **ΘΕ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΗ** τοῦ **ΔΘ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΔΕ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη·

ἀλλ' ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΗ** τοῦ **ΔΘ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Ζ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ] ἃ [ἄρα] μέρη ἐστὶν ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΔΕ** ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Ζ** ἢ τὸ αὐτὸ μέρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιαʹ.

Ἐαν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.



Ἔστω ὡς ὅλος ὁ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸν **ΓΔ**, οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ **ΑΕ** πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν **ΓΖ**· λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ **ΕΒ** πρὸς λοιπὸν τὸν **ΖΔ** ἐστιν, ὡς ὅλος ὁ **ΑΒ** πρὸς ὅλον τὸν **ΓΔ**.

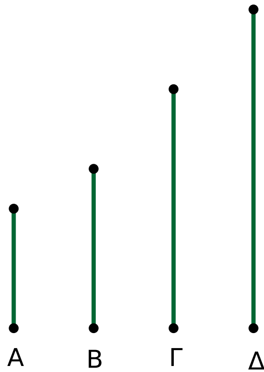
Ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **ΑΒ** πρὸς τὸν **ΓΔ**, οὕτως ὁ **ΑΕ** πρὸς τὸν **ΓΖ**, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **ΑΕ** τοῦ **ΓΖ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ **ΕΒ** λοιποῦ τοῦ **ΖΔ** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ὁ **ΑΒ** τοῦ **ΓΔ**.

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΕΒ** πρὸς τὸν **ΖΔ**, οὕτως ὁ **ΑΒ** πρὸς τὸν **ΓΔ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβʹ.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως οἱ **Α**, **Γ** πρὸς τοὺς **Β**, **Δ**.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **Β** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Δ** ἢ μέρη.

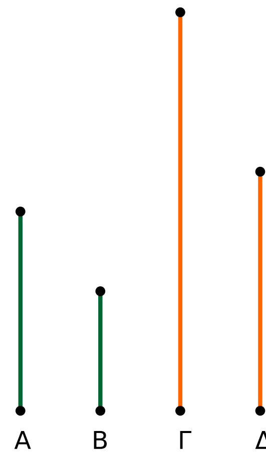
καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ **Α**, **Γ** συναμφοτέρου τοῦ **Β**, **Δ** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ **Α** τοῦ **Β**.

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως οἱ **Α**, **Γ** πρὸς τοὺς **Β**, **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγʹ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Δ**.



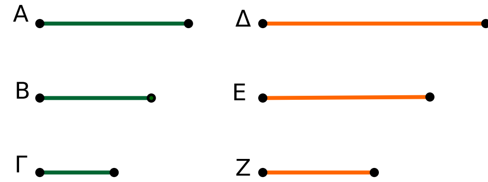
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **Β** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Δ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐναλλὰξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ **Α** τοῦ **Γ** ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Β** τοῦ **Δ** ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾿ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ **Δ**, **Ε**, **Ζ**, ὡς μὲν ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, ὡς δὲ ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**· λέγω, ὅτι καὶ δι᾿ ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Ε**.

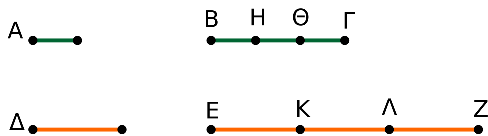
πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ**.

ὡς δὲ ὁ **Β** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Δ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ**· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιεʹ.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσακις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἡ **Α** ἀριθμόν τινα τὸν **ΒΓ** μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ **Δ** ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν **ΕΖ** μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ **Α** μονὰς τὸν **Δ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **ΒΓ** τὸν **ΕΖ**.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ **Α** μονὰς τὸν **ΒΓ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Δ** τὸν **ΕΖ**, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ **ΒΓ** μονάδες, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ **ΕΖ** ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ **Δ**.

διῃρήσθω ὁ μὲν **ΒΓ** εἰς τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας τὰς **ΒΗ**, **ΗΘ**, **ΘΓ**, ὁ δὲ **ΕΖ** εἰς τοὺς τῷ **Δ** ἴσους τοὺς **ΕΚ**, **ΚΛ**, **ΛΖ**. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΒΗ**, **ΗΘ**, **ΘΓ** τῷ πλήθει τῶν **ΕΚ**, **ΚΛ**, **ΛΖ**.

καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ **ΒΗ**, **ΗΘ**, **ΘΓ** μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ **ΕΚ**,

ΚΛ, **ΛΖ** ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΒΗ**, **ΗΘ**, **ΘΓ** μονάδων τῷ πλήθει τῶν **ΕΚ**, **ΚΛ**, **ΛΖ** ἀριθμῶν, ἔσται ἄρα ὡς ἡ **ΒΗ** μονὰς πρὸς τὸν **ΕΚ** ἀριθμόν, οὕτως ἡ **ΗΘ** μονὰς πρὸς τὸν **ΚΛ** ἀριθμὸν καὶ ἡ **ΘΓ** μονὰς πρὸς τὸν **ΛΖ** ἀριθμόν.

ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους·

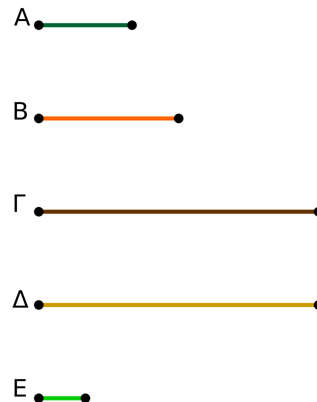
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΗ** μονὰς πρὸς τὸν **ΕΚ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **ΒΓ** πρὸς τὸν **ΕΖ**. ἴση δὲ ἡ **ΒΗ** μονὰς τῇ **Α** μονάδι, ὁ δὲ **ΕΚ** ἀριθμὸς τῷ **Δ** ἀριθμῷ.

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Α** μονὰς πρὸς τὸν **Δ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **ΒΓ** πρὸς τὸν **ΕΖ**. ἰσάκις ἄρα ἡ **Α** μονὰς τὸν **Δ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **ΒΓ** τὸν **ΕΖ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ ὁ μὲν **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω, ὁ δὲ **Β** τὸν **Α** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ **Γ** τῷ **Δ**.



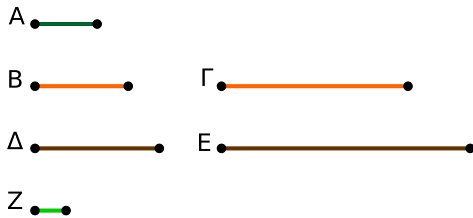
Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ὁ **Β** ἄρα τὸν **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Α** μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Β** τὸν **Γ**. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Β** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Α** τὸν **Γ**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Β** τὸν **Α** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, ὁ **Α** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Β** μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Β** κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Β** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Α** τὸν **Δ**. ἰσάκις δὲ ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Β** ἀριθμὸν ἐμέτρει καὶ ὁ **Α** τὸν **Γ**· ἰσάκις ἄρα ὁ **Α** ἑκάτερον τῶν **Γ**, **Δ** μετρεῖ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ **Γ** τῷ **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **Α** δύο ἀριθμοὺς τοὺς **Β**, **Γ** πολλαπλασιάσας τοὺς **Δ**, **Ε** ποιείτω· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, ὁ **Β** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Α** μονάδας.

μετρεῖ δὲ καὶ ἡ **Ζ** μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ **Ζ** μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Β** τὸν **Δ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Ζ** μονὰς πρὸς τὸν **Α** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Δ**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ **Ζ** μονὰς πρὸς τὸν **Α** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Β** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

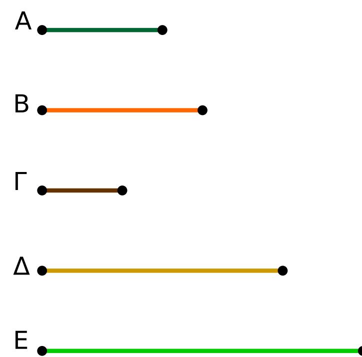
ιη΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** ἀριθμόν τινα τὸν **Γ** πολλαπλασιάσαντες τοὺς **Δ**, **Ε** ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, καὶ ὁ **Γ** ἄρα τὸν **Α** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Γ** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ **Γ** δύο ἀριθμοὺς τοὺς **Α**, **Β** πολλαπλασιάσας τοὺς **Δ**, **Ε** πεποίηκεν.

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

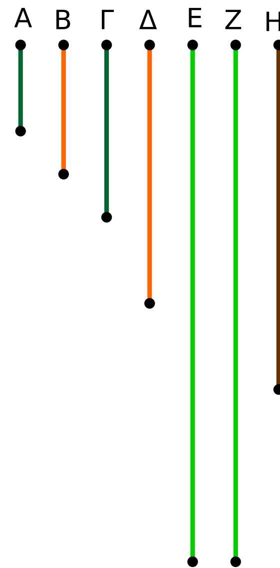


ιθ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσασρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, καὶ ὁ μὲν **Α** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω, ὁ δὲ **Β** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ζ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ **Ε** τῷ **Ζ**.

Ὁ γὰρ **Α** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Η** ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ **Α** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Η** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ **Α** δύο ἀριθμοὺς τοὺς **Γ**, **Δ** πολλαπλασιάσας τούς **Η**, **Ε** πεποίηκεν.



ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ε**. ἀλλ' ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ε**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Α** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Η** πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Β** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ζ** πεποίηκεν, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** ἀριθμόν τινα τὸν **Γ** πολλαπλασιάσαντες τοὺς **Η**, **Ζ** πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ζ**.

ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ε**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ζ**. ὁ **Η** ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν **Ε**, **Ζ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ **Ε** τῷ **Ζ**.

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ **Ε** τῷ **Ζ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**.

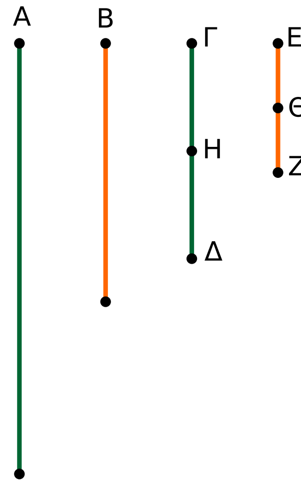
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ **Ε** τῷ **Ζ**, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ζ**. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, ὡς δὲ ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**. καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα.

Ἔστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β** οἱ **ΓΔ**, **ΕΖ**· λέγω, ὅτι ἰσάκις ὁ **ΓΔ** τὸν **Α** μετρεῖ καὶ ὁ **ΕΖ** τὸν **Β**.

Ὁ **ΓΔ** γὰρ τοῦ **Α** οὐκ ἔστι μέρη. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ **ΕΖ** ἄρα τοῦ **Β** τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ **ΓΔ** τοῦ **Α**. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ **ΓΔ** μέρη τοῦ **Α**, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ **ΕΖ** μέρη τοῦ **Β**.



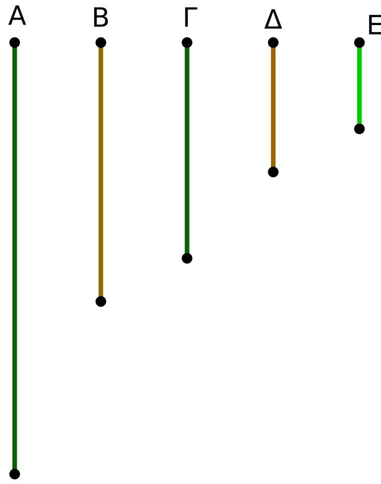
διῃρήσθω ὁ μὲν **ΓΔ** εἰς τὰ τοῦ **Α** μέρη τὰ **ΓΗ**, **ΗΔ**, ὁ δὲ **ΕΖ** εἰς τὰ τοῦ **Β** μέρη τὰ **ΕΘ**, **ΘΖ**· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΓΗ**, **ΗΔ** τῷ πλήθει τῶν **ΕΘ**, **ΘΖ**. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ **ΓΗ**, **ΗΔ** ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ **ΕΘ**, **ΘΖ** ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **ΓΗ**, **ΗΔ** τῷ πλήθει τῶν **ΕΘ**, **ΘΖ**, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΓΗ** πρὸς τὸν **ΕΘ**, οὕτως ὁ **ΗΔ** πρὸς τὸν **ΘΖ**.

ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΓΗ** πρὸς τὸν **ΕΘ**, οὕτως ὁ **ΓΔ** πρὸς τὸν **ΕΖ**· οἱ **ΓΗ**, **ΕΘ** ἄρα τοῖς **ΓΔ**, **ΕΖ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ **ΓΔ**, **ΕΖ** ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ **ΓΔ** τοῦ **Α**· μέρος ἄρα. καὶ ὁ **ΕΖ** τοῦ **Β** τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ **ΓΔ** τοῦ **Α**· ἰσάκις ἄρα ὁ **ΓΔ** τὸν **Α** μετρεῖ καὶ ὁ **ΕΖ** τὸν **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

καʹ.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**· λέγω, ὅτι οἱ **Α**, **Β** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.



Εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν **Α**, **Β** ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς **Α**, **Β**. ἔστωσαν οἱ **Γ**, **Δ**.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἰσάκις ἄρα ὁ **Γ** τὸν **Α** μετρεῖ καὶ ὁ **Δ** τὸν **Β**.

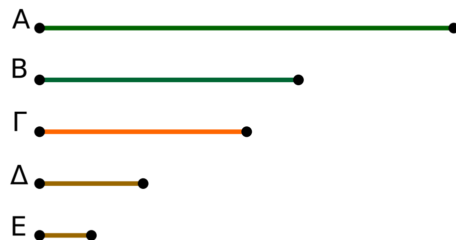
ὁσάκις δὴ ὁ **Γ** τὸν **Α** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ε**. καὶ ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Ε** μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ **Γ** τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Ε** μονάδας, καί ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Γ** μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ **Ε** καὶ τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας. ὁ **Ε** ἄρα τοὺς **Α**, **Β** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν **Α**, **Β** ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς **Α**, **Β**. οἱ **Α**, **Β** ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβʹ.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ **Α**, **Β**· λέγω, ὅτι οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Γ**. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ **Γ** τὸν **Α** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Δ**, ὁσάκις δὲ ὁ **Γ** τὸν **Β** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ε**.

Ἐπεὶ ὁ **Γ** τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας, ὁ **Γ** ἄρα τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Γ** τὸν **Ε** πολλα-

πλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ **Γ** δύο ἀριθμοὺς τοὺς **Δ**, **Ε** πολλαπλασιάσας τοὺς **Α**, **Β** πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· οἱ **Δ**, **Ε** ἄρα τοῖς **Α**, **Β** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

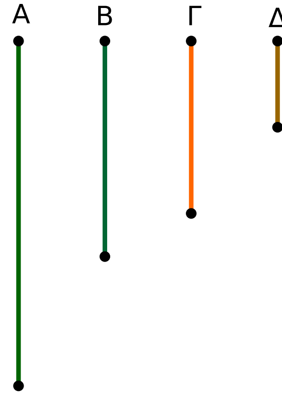
οὐκ ἄρα τοὺς **Α**, **Β** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ **Α**, **Β** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ **Α**, **Β**, τὸν δὲ **Α** μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ **Γ**· λέγω, ὅτι καὶ οἱ **Γ**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **Γ**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς **Γ**, **Β** ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Δ**. ἐπεὶ ὁ **Δ** τὸν **Γ** μετρεῖ, ὁ δὲ **Γ** τὸν **Α** μετρεῖ, καὶ ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Α** μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **Β**· ὁ **Δ** ἄρα τοὺς **Α**, **Β** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



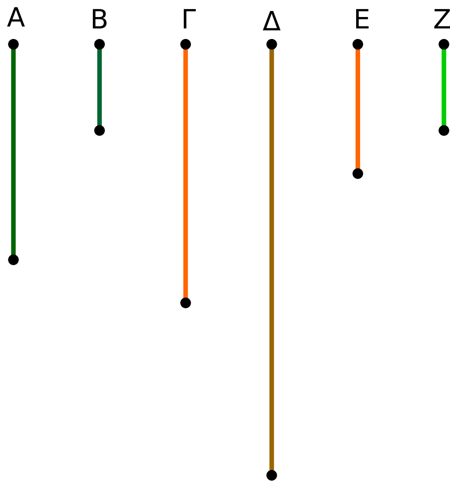
οὐκ ἄρα τοὺς **Γ**, **Β** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ **Γ**, **Β** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** πρός τινα ἀριθμὸν τὸν **Γ** πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ **Γ**, **Δ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **Γ**, **Δ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς **Γ**, **Δ** ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Ε**. καὶ ἐπεὶ οἱ **Γ**, **Δ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τὸν δὲ **Γ** μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ **Ε**, οἱ **Α**, **Ε** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὴ ὁ **Ε** τὸν **Δ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ζ**· καὶ ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Ε** μονάδας. ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν.



ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν **Ε**, **Ζ** τῷ ἐκ τῶν **Α**, **Β**. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Ζ**. οἱ δὲ **Α**, **Ε** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **Γ**· ὁ **Ε** ἄρα τοὺς **Β**, **Γ** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

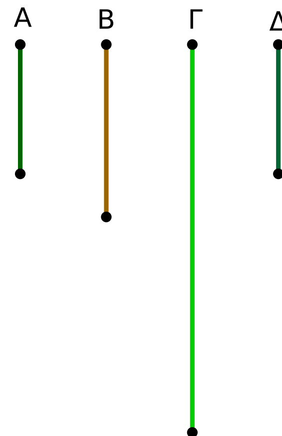
οὐκ ἄρα τοὺς **Γ**, **Δ** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ **Γ**, **Δ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ **Α**, **Β**, καὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ **Β**, **Γ** πρῶτοι πρὸς ἀλλὴλους εἰσίν.

Κείσθω γὰρ τῷ **Α** ἴσος ὁ **Δ**. ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ **Α** τῷ **Δ**, καί οἱ **Δ**, **Β** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν·



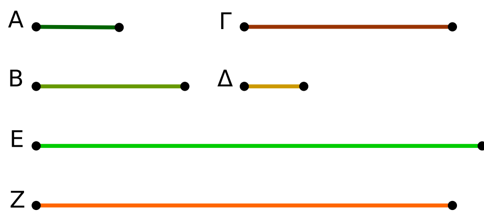
ἑκάτερος ἄρα τῶν **Δ**, **Α** πρὸς τὸν **Β** πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ἐκ τῶν **Δ**, **Α** ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν **Β** πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν **Δ**, **Α** γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ **Γ**.

οἱ **Γ**, **Β** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσιν, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς **Γ**, **Δ** ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω, ὁ δὲ **Γ** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ζ** ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ **Ε**, **Ζ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν **Α**, **Β** πρὸς τὸν **Γ** πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν **Α**, **Β** ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν **Γ** πρῶτος ἔσται.

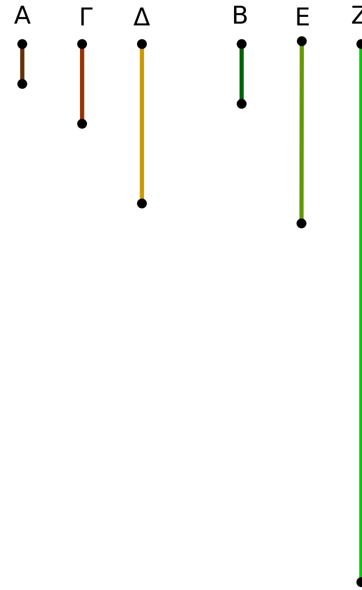
ὁ δὲ ἐκ τῶν **Α**, **Β** γενόμενός ἐστιν ὁ **Ε**· οἱ **Ε**, **Γ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ **Ε**, **Δ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

ἑκάτερος ἄρα τῶν **Γ**, **Δ** πρὸς τὸν **Ε** πρῶτός ἐστιν. καὶ ὁ ἐκ τῶν **Γ**, **Δ** ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν **Ε** πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν **Γ**, **Δ** γενόμενός ἐστιν ὁ **Ζ**. οἱ **Ε**, **Ζ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται [καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ **Α**, **Β**, καὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω, τὸν δὲ **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω, ὁ δὲ **Β** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω, τὸν δὲ **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Ζ** ποιείτω· λέγω, ὅτι οἵ τε **Γ**, **Ε** καὶ οἱ **Δ**, **Ζ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Ἐπεὶ γὰρ οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, οἱ **Γ**, **Β** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

ἐπεὶ οὖν οἱ **Γ**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ **Β** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν, οἱ **Γ**, **Ε** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

πάλιν, ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ **Β** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν, οἱ **Α**, **Ε** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

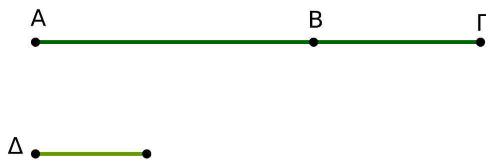
ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Γ** πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς **Β**, **Ε** ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν **Α**, **Γ** ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν **Β**, **Ε** πρῶτός ἐστιν.

καί ἐστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν **Α**, **Γ** ὁ **Δ**, ὁ δὲ ἐκ τῶν **Β**, **Ε** ὁ **Ζ**. οἱ **Δ**, **Ζ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**· λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ **ΑΓ** πρὸς ἑκάτερον τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** πρῶτός ἐστιν.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **ΓΑ**, **ΑΒ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς **ΓΑ**, **ΑΒ** ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Δ**.

ἐπεὶ οὖν ὁ **Δ** τοὺς **ΓΑ**, **ΑΒ** μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν **ΒΓ** μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **ΒΑ**· ὁ **Δ** ἄρα τοὺς **ΑΒ**, **ΒΓ** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς **ΓΑ**, **ΑΒ** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ **ΓΑ**, **ΑΒ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ **ΑΓ**, **ΓΒ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁ **ΓΑ** ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** πρῶτός ἐστιν.

Ἔστωσαν δὴ πάλιν οἱ **ΓΑ**, **ΑΒ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω, ὅτι καὶ οἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

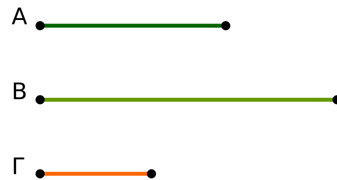
Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς **ΑΒ**, **ΒΓ** ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Δ**.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** ἑκάτερον τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸν **ΓΑ** μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **ΑΒ**· ὁ **Δ** ἄρα τοὺς **ΓΑ**, **ΑΒ** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς **ΑΒ**, **ΒΓ** ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄.

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμόν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

Ἔστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ **Α** καὶ τὸν **Β** μὴ μετρείτω· λέγω, ὅτι οἱ **Β**, **Α** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **Β**, **Α** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω ὁ **Γ**. ἐπεὶ ὁ **Γ** τὸν **Β** μετρεῖ, ὁ δὲ **Α** τὸν **Β** οὐ μετρεῖ, ὁ **Γ** ἄρα τῷ **Α** οὔκ ἐστιν ὁ αὐτός.

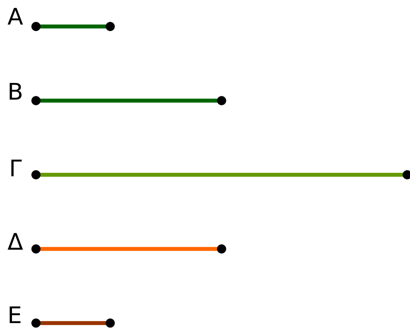
καὶ ἐπεὶ ὁ **Γ** τοὺς **Β**, **Α** μετρεῖ, καὶ τὸν **Α** ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα τοὺς **Β**, **Α** μετρήσει τις ἀριθμός. οἱ **Α**, **Β** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν **Γ** ποιείτωσαν, τὸν δὲ **Γ** μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ **Δ**· λέγω, ὅτι ὁ **Δ** ἕνα τῶν **Α**, **Β** μετρεῖ.



Τὸν γὰρ **Α** μὴ μετρείτω· καί ἐστι πρῶτος ὁ **Δ**· οἱ **Α**, **Δ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁσάκις ὁ **Δ** τὸν **Γ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ε**.

ἐπεὶ οὖν ὁ **Δ** τὸν **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Ε** μονάδας, ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν.

ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν **Δ**, **Ε** τῷ ἐκ τῶν **Α**, **Β**.

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Ε**. οἱ δὲ **Δ**, **Α** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ.

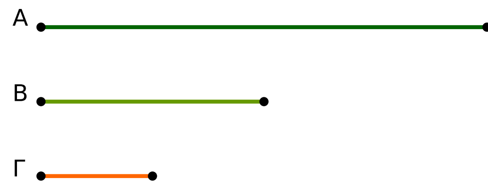
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν τὸν **Β** μὴ μετρῇ, τὸν **Α** μετρήσει. ὁ **Δ** ἄρα ἕνα τῶν **Α**, **Β** μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λαʹ.

Ἅπας σύνθεντος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ **Α**· λέγω, ὅτι ὁ **Α** ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ **Α**, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Β**. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ **Β**, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν.



εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Γ**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Γ** τὸν **Β** μετρεῖ, ὁ δὲ **Β** τὸν **Α** μετρεῖ, καὶ ὁ **Γ** ἄρα τὸν **Α** μετρεῖ.

καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ **Γ**, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν.

εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει.

εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν **Α** ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς. ληφθήσεταί τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν **Α** μετρήσει.

Ἅπας ἄρα σύνθεντος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ΄.

Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἔστω ἀριθμὸς ὁ **Α**· λέγω, ὅτι ὁ **Α** ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

A

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ **Α**, γεγονὸς ἂν εἴη τό ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄.

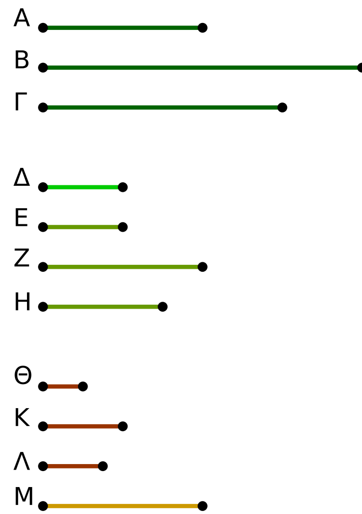
Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**.

Οἱ **Α**, **Β**, **Γ** γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ **Α**, **Β**, **Γ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ δὲ οὔ, εἰλήφθω τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ **Δ**, καὶ ὁσάκις ὁ **Δ** ἕκαστον τῶν **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η**.

καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η** ἕκαστον τῶν **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας. οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** ἄρα τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** ἄρα τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν.



λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**, ἔσονται [τινες] τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η** ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**.

ἔστωσαν οἱ **Θ**, **Κ**, **Λ**· ἰσάκις ἄρα ὁ **Θ** τὸν **Α** μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν **Κ**, **Λ** ἑκάτερον τῶν **Β**, **Γ**. ὁσάκις δὲ ὁ **Θ** τὸν **Α** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Μ**· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν **Κ**, **Λ** ἑκάτερον τῶν **Β**, **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Μ** μονάδας.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Θ** τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Μ** μονάδας, καὶ ὁ **Μ** ἄρα τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Θ** μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ **Μ** καὶ ἑκάτερον τῶν **Β**, **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν **Κ**, **Λ** μονάδας· ὁ **Μ** ἄρα τοὺς **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖ.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Θ** τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Μ** μονάδας, ὁ **Θ** ἄρα τὸν **Μ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν **Ε**, **Δ** τῷ ἐκ τῶν **Θ**, **Μ**.

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Μ** πρὸς τὸν **Δ**. μείζων δὲ ὁ **Ε** τοῦ **Θ**· μείζων ἄρα καὶ ὁ **Μ** τοῦ **Δ**. καὶ μετρεῖ τοὺς **Α**, **Β**, **Γ**· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὁ **Δ** τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον.

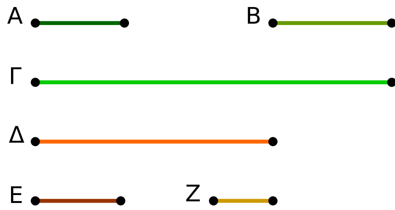
οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η** ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**. οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ′.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**· δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Οἱ **Α**, **Β** γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· καὶ ὁ **Β** ἄρα τὸν **Α** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν. οἱ **Α**, **Β** ἄρα τὸν **Γ** μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον.

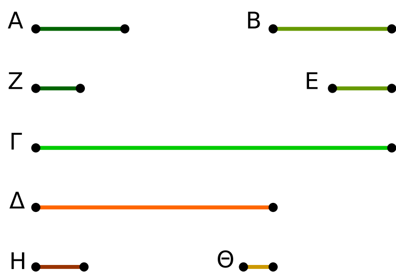


εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ **Α**, **Β** ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Γ**. μετρείτωσαν τὸν **Δ**. καὶ ὁσάκις ὁ **Α** τὸν **Δ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ε**, ὁσάκις δὲ ὁ **Β** τὸν **Δ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ζ**.

ὁ μὲν **Α** ἄρα τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, ὁ δὲ **Β** τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν **Α**, **Ε** τῷ ἐκ τῶν **Β**, **Ζ**. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Ε**. οἱ δὲ **Α**, **Β** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ **Β** ἄρα τὸν **Ε** μετρεῖ, ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** τοὺς **Β**, **Ε** πολλαπλασιάσας τοὺς **Γ**, **Δ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**. μετρεῖ δὲ ὁ **Β** τὸν **Ε**· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ** ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ **Α**, **Β** μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Γ**. ὁ **Γ** ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν **Α**, **Β** μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β** οἱ **Ζ**, **Ε**· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν **Α**, **Ε** τῷ ἐκ τῶν **Β**, **Ζ**. καὶ ὁ **Α** τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· καὶ ὁ **Β** ἄρα τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν· οἱ **Α**, **Β** ἄρα τὸν **Γ** μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον.



εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ **Α**, **Β** ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Γ**. μετρείτωσαν τὸν **Δ**. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ **Α** τὸν **Δ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Η**, ὁσάκις δὲ ὁ **Β** τὸν **Δ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Θ**. ὁ μὲν **Α** ἄρα τὸν **Η** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, ὁ δὲ **Β** τὸν **Θ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν.

ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν **Α**, **Η** τῷ ἐκ τῶν **Β**, **Θ**· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**. ὡς δὲ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Ε**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**. οἱ δὲ **Ζ**, **Ε** ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων

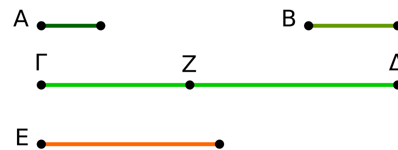
τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Η** μετρεῖ.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** τοὺς **Ε**, **Η** πολλαπλασιάσας τοὺς **Γ**, **Δ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**. ὁ δὲ **Ε** τὸν **Η** μετρεῖ· καὶ ὁ **Γ** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ **Α**, **Β** μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Γ**. ὁ **Γ** ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν **Α**, **Β** μετρεῖται· ὅπερ ἔπει δεῖξαι.

λε΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσιν, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ᾽ αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** ἀριθμόν τινα τὸν **ΓΔ** μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν **Ε**· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Ε** τὸν **ΓΔ** μετρεῖ.



Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ **Ε** τὸν **ΓΔ**, ὁ **Ε** τὸν **ΔΖ** μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν **ΓΖ**. καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β** τὸν **Ε** μετροῦσιν, ὁ δὲ **Ε** τὸν **ΔΖ** μετρεῖ, καὶ οἱ **Α**, **Β** ἄρα τὸν **ΔΖ** μετρήσουσιν. μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν **ΓΔ**· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν **ΓΖ** μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Ε**· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ **Ε** τὸν **ΓΔ**· μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

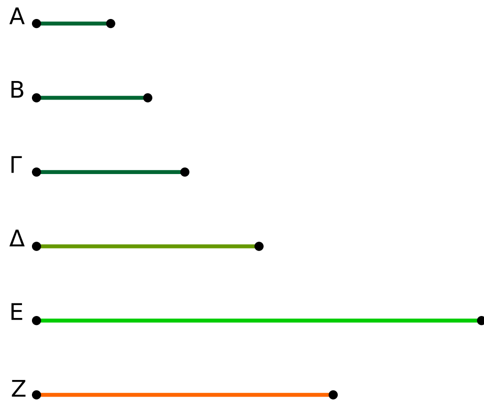
λϛ΄.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**· δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν **Α**, **Β** ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ **Δ**. ὁ δὴ **Γ** τὸν **Δ** ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. μετροῦσι δὲ καὶ οἱ **Α**, **Β** τὸν **Δ**· οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἄρα τὸν **Δ** μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον.

εἰ γὰρ μή, μετρήσουσιν [τινα] ἀριθμὸν οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Δ**. μετρείτωσαν τὸν **Ε**. ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** τὸν **Ε** μετροῦσιν, καὶ οἱ **Α**, **Β** ἄρα τὸν **Ε** μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν **Α**, **Β** μετρούμενος [τὸν **Ε**] μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν **Α**, **Β** μετρούμενός ἐστιν ὁ **Δ**· ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Ε** μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ **Α**, **Β**, **Γ** μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Δ**· οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἄρα ἐλάχιστον τὸν **Δ** μετροῦσιν.



Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ **Γ** τὸν **Δ**, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν **Γ**, **Δ** ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ **Ε**.

ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β** τὸν **Δ** μετροῦσιν, ὁ δὲ **Δ** τὸν **Ε** μετρεῖ, καὶ οἱ **Α**, **Β** ἄρα τὸν **Ε** μετροῦσιν. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ **Γ** [τὸν **Ε**· καὶ] οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἄρα τὸν **Ε** μετροῦσιν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστον.

εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Ε**. μετρείτωσαν τὸν **Ζ**. ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** τὸν **Ζ** μετροῦσιν, καὶ οἱ **Α**, **Β** ἄρα τὸν **Ζ** μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν **Α**, **Β** μετρούμενος τὸν **Ζ** μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν **Α**, **Β** μετρούμενός ἐστιν ὁ **Δ**· ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Ζ** μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ **Γ** τὸν **Ζ**· οἱ **Δ**, **Γ** ἄρα τὸν **Ζ** μετροῦσιν· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν **Δ**, **Γ** μετρούμενος τὸν **Ζ** μετρήσει. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν **Γ**, **Δ** μετρούμενός ἐστιν ὁ **Ε**· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Ζ** μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ **Α**, **Β**, **Γ** μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Ε**. ὁ **Ε** ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζʹ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι.

Ἀριθμὸς γάρ ὁ **Α** ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ **Β** μετρείσθω· λέγω, ὅτι ὁ **Α** ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ **Β**.



Ὁσάκις γὰρ ὁ **Β** τὸν **Α** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Γ**. ἐπεὶ ὁ **Β** τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Γ** μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ **Δ** μονὰς τὸν **Γ** ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ **Δ** μονὰς τὸν **Γ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Β** τὸν **Α**.

ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ **Δ** μονὰς τὸν **Β** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Γ** τὸν **Α**· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ **Δ** μονὰς τοῦ **Β** ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Γ** τοῦ **Α**. ἡ δὲ **Δ** μονὰς τοῦ **Β** ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ **Γ** ἄρα τοῦ **Α** μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ **Β**. ὥστε ὁ **Α** μέρος ἔχει τὸν **Γ** ὁμώνυμον ὄντα τῷ **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Ἐὰν ἀριθμος μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **Α** μέρος ἐχέτω ὁτιοῦν τὸν **Β**, καὶ τῷ **Β** μέρει ὁμώνυμος ἔστω [ἀριθμὸς] ὁ **Γ**· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** τὸν **Α** μετρεῖ.



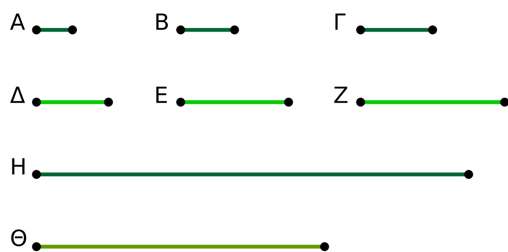
Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Β** τοῦ **Α** μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ **Γ**, ἔστι δὲ καὶ ἡ **Δ** μονὰς τοῦ **Γ** μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ **Δ** μονὰς τοῦ **Γ** ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ **Β** τοῦ **Α**· ἰσάκις ἄρα ἡ **Δ** μονὰς τὸν **Γ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Β** τὸν **Α**.

ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ **Δ** μονὰς τὸν **Β** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Γ** τὸν **Α**. ὁ **Γ** ἄρα τὸν **Α** μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεὶξαι.

λθ΄.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ **Α**, **Β**, **Γ**· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ **Α**, **Β**, **Γ** μέρη.



Ἔστωσαν γὰρ τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ οἱ **Δ**, **Ε**, **Ζ**, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν **Δ**, **Ε**, **Ζ** ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ **Η**.

Ὁ **Η** ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς **Δ**, **Ε**, **Ζ**. τοῖς δὲ **Δ**, **Ε**, **Ζ** ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ **Α**, **Β**, **Γ**· ὁ **Η** ἄρα ἔχει τὰ **Α**, **Β**, **Γ** μέρη. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστος ὤν, εἰ γὰρ μή, ἔσται τις τοῦ **Η** ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἕξει τὰ **Α**, **Β**, **Γ** μέρη. ἔστω ὁ **Θ**.

ἐπεὶ ὁ **Θ** ἔχει τὰ **Α**, **Β**, **Γ** μέρη, ὁ **Θ** ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** μέρεσιν. τοῖς δὲ **Α**, **Β**, **Γ** μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ **Δ**, **Ε**, **Ζ**· ὁ **Θ** ἄρα ὑπὸ τῶν **Δ**, **Ε**, **Ζ** μετρεῖται. καί ἐστιν ἐλάσσων τοῦ **Η**· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ **Η** ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἕξει τὰ **Α**, **Β**, **Γ** μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

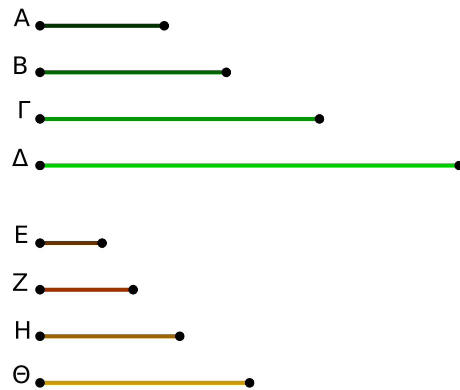
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 8

α′.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ **Α**, **Δ**, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.



Εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ**, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος [τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**] τῷ πλήθει [τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ**], δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Δ**, ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**.

οἱ δὲ **Α**, **Δ** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ **Α** τὸν **Ε** ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** ἐλάσσονες ὄντες τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς.

οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

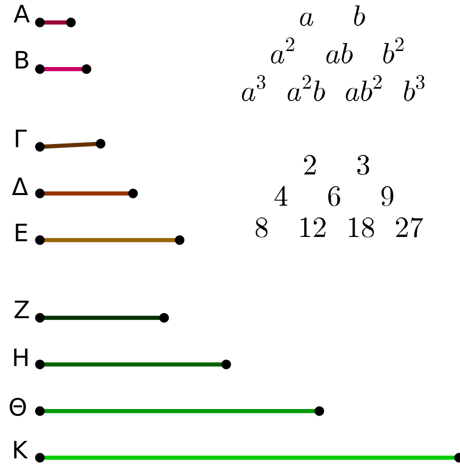
β′.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β**· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ **Β** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ **Α** τοὺς **Γ**, **Δ**, **Ε** πολλαπλασιάσας τοὺς **Ζ**, **Η**, **Θ** ποιείτω, ὁ δὲ **Β** τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Κ** ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, [οὕτως] ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**.



πάλιν, ἐπεὶ ὁ μὲν **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, ὁ δὲ **Β** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν, ἑκάτερος ἄρα τῶν **Α**, **Β** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Δ**, **Ε** πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**. ἀλλ' ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** τοὺς **Γ**, **Δ** πολλαπλασιάσας τοὺς **Ζ**, **Η** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, [οὕτως] ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**. ὡς δὲ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ἦν ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Α** τοὺς **Δ**, **Ε** πολλαπλασιάσας τοὺς **Η**, **Θ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**. ἀλλ' ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**. καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**. καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β** τὸν **Ε** πολλαπλασιάσαντες τοὺς **Θ**, **Κ** πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Κ**. ἀλλ' ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὅ τε **Ζ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**. καὶ ὡς ἄρα ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὅ τε **Η** πρὸς τὸν **Θ** καὶ ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Κ**· οἱ **Γ**, **Δ**, **Ε** ἄρα καὶ οἱ **Ζ**, **Η**, **Θ**, **Κ** ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** λόγῳ.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ **Α**, **Β** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, οἱ **Α**, **Β** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν **Α**, **Β** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Γ**, **Ε** πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν **Γ**, **Ε** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Ζ**, **Κ** πεποίηκεν· οἱ **Γ**, **Ε** ἄρα καὶ οἱ **Ζ**, **Κ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

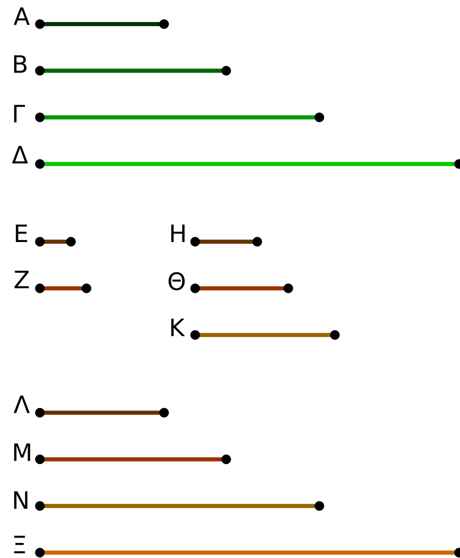
ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οἱ **Γ**, **Δ**, **Ε** ἄρα καὶ οἱ **Ζ**, **Η**, **Θ**, **Κ** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκρον αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν, ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

γ΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**· λέγω, ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ **Α**, **Δ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** λόγῳ οἱ **Ε**, **Ζ**, τρεῖς δὲ οἱ **Η**, **Θ**, **Κ**, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**. εἰλήφθωσαν καὶ ἔστωσαν οἱ **Λ**, **Μ**, **Ν**, **Ξ**.

Καὶ ἐπεὶ οἱ **Ε**, **Ζ** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

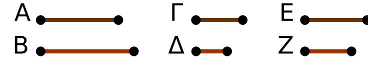
καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν **Ε**, **Ζ** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Η**, **Κ** πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν **Η**, **Κ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Λ**, **Ξ** πεποίηκεν, καὶ οἱ **Η**, **Κ** ἄρα καὶ οἱ **Λ**, **Ξ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

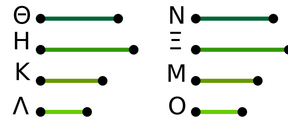
καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ **Λ**, **Μ**, **Ν**, **Ξ** ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** τῷ πλήθει τῶν **Λ**, **Μ**, **Ν**, **Ξ**, ἕκαστος ἄρα τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ἑκάστῳ τῶν **Λ**, **Μ**, **Ν**, **Ξ** ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν **Α** τῷ **Λ**, ὁ δὲ **Δ** τῷ **Ξ**. καί εἰσιν οἱ **Λ**, **Ξ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ οἱ **Α**, **Δ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὅ τε τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** καὶ ὁ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ἔτι ὁ τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἔν τε τῷ τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** λόγῳ καὶ ἐν τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ἔτι τῷ τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**.





$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \frac{\Gamma}{\Delta}, \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} : \frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \Theta, \mathrm{H}, \mathrm{K}, \Lambda : 5, 6, 4, 3$$

$$\frac{\Theta}{\mathrm{H}}, \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}, \frac{\mathrm{K}}{\Lambda} : \frac{5}{6}, \frac{6}{4}, \frac{4}{3}$$

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν **Β**, **Γ** ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ **Η**. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ **Β** τὸν **Η** μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ **Α** τὸν **Θ** μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ **Γ** τὸν **Η** μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ **Δ** τὸν **Κ** μετρείτω. ὁ δὲ **Ε** τὸν **Κ** ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ.

μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ **Ε** τὸν **Κ** μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ **Ζ** τὸν **Λ** μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ **Α** τὸν **Θ** μετρεῖ καὶ ὁ **Β** τὸν **Η**, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Κ**, καὶ ἔτι ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Λ**· οἱ **Θ**, **Η**, **Κ**, **Λ** ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** καὶ ἐν τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ** λόγῳ.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ **Θ**, **Η**, **Κ**, **Λ** ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἔν τε τοῖς τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** καὶ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ἐν τῷ τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ** λόγοις, ἔστωσαν οἱ **Ν**, **Ξ**, **Μ**, **Ο**.

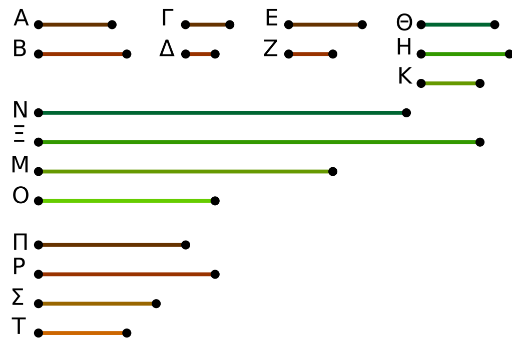
καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Ν** πρὸς τὸν **Ξ**, οἱ δὲ **Α**, **Β** ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ **Β** ἄρα τὸν **Ξ** μετρεῖ.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Γ** τὸν **Ξ** μετρεῖ· οἱ **Β**, **Γ** ἄρα τὸν **Ξ** μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν **Β**, **Γ** μετρούμενος τὸν **Ξ** μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν **Β**, **Γ** μετρεῖται ὁ **Η**· ὁ **Η** ἄρα τὸν **Ξ** μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν **Θ**, **Η**, **Κ**, **Λ** ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἔν τε τῷ τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** καὶ τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ἔτι τῷ τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ** λόγῳ.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ **Ε** τὸν **Κ**, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν **Ε**, **Κ** ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ **Μ**. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ **Κ** τὸν **Μ** μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν **Θ**, **Η** ἑκάτερον τῶν **Ν**, **Ξ** μετρείτω, ὁσάακις δὲ ὁ **Ε** τὸν **Μ** μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ **Ζ** τὸν **Ο** μετρείτω.

ἐπεὶ ἰσάκις ὁ **Θ** τὸν **Ν** μετρεῖ καὶ ὁ **Η** τὸν **Ξ**, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Ν** πρὸς τὸν **Ξ**. ὡς δὲ ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Ν** πρὸς τὸν **Ξ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ξ** πρὸς τὸν **Μ**.

πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ **Ε** τὸν **Μ** μετρεῖ καὶ ὁ **Ζ** τὸν **Ο**, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Μ** πρὸς τὸν **Ο**· οἱ **Ν**, **Ξ**, **Μ**, **Ο** ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε **Α** πρὸς τὸν **Β** καὶ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ἔτι τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ** λόγοις.



$$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad : \frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}, \frac{\beta\gamma}{\beta\delta}, \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad : \frac{5}{6}, \frac{6}{4}, \frac{5}{3}$$

$$\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\gamma\varepsilon}, \frac{\beta\gamma\varepsilon}{\beta\delta\varepsilon}, \frac{\beta\delta\varepsilon}{\beta\delta\zeta} \quad : \frac{25}{30}, \frac{30}{20}, \frac{20}{12}$$

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς **Α Β**, **Γ Δ**, **Ε Ζ** λόγοις. εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν **Ν**, **Ξ**, **Μ**, **Ο** ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς **Α Β**, **Γ Δ**, **Ε Ζ** λόγοις. ἔστωσαν οἱ **Π**, **Ρ**, **Σ**, **Τ**.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Π** πρὸς τὸν **Ρ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οἱ δὲ **Α**, **Β** ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ **Β** ἄρα τὸν **Ρ** μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Γ** τὸν **Ρ** μετρεῖ· οἱ **Β**, **Γ** ἄρα τὸν **Ρ** μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν **Β**, **Γ** μετούμενος τὸν **Ρ** μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν **Β**, **Γ** μετρούμενος ἐστιν ὁ **Η**· ὁ **Η** ἄρα τὸν **Ρ** μετρεῖ. καί ἐστιν ὡς ὁ **Η** πρὸς τὸν **Ρ**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Σ**· καὶ ὁ **Κ** ἄρα τὸν **Σ** μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ **Ε** τὸν **Σ**· οἱ **Ε**, **Κ** ἄρα τὸν **Σ** μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν **Ε**, **Κ** μετρούμενος τὸν **Σ** μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν **Ε**, **Κ** μετρούμενός ἐστιν ὁ **Μ**· ὁ **Μ** ἄρα τὸν **Σ** μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

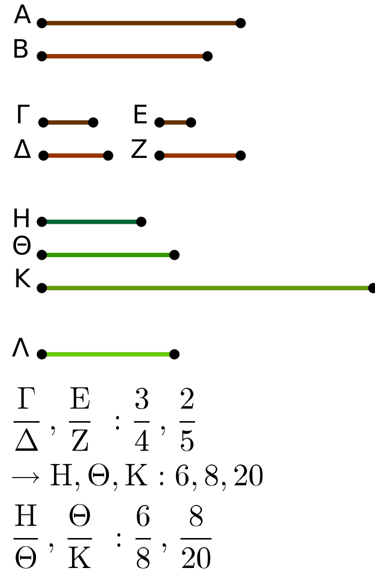
οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν **Ν**, **Ξ**, **Μ**, **Ο** ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἔν τε τοῖς τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** καὶ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ἔτι τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ** λόγοις· οἱ **Ν**, **Ξ**, **Μ**, **Ο** ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς **Α Β**, **Γ Δ**, **Ε Ζ** λόγοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε′.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ τοῦ μὲν **Α** πλευραὶ ἔστωσαν οἱ **Γ**, **Δ** ἀριθμοί, τοῦ δὲ **Β** οἱ **Ε**, **Ζ**· λέγω, ὅτι ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ** εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς **Γ Ε**, **Δ Ζ** λόγοις, οἱ **Η**, **Θ**, **Κ**, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν **Γ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως τὸν **Η** πρὸς τὸν **Θ**, ὡς δὲ τὸν **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως τὸν **Θ** πρὸς τὸν **Κ**. καὶ ὁ **Δ** τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Λ** ποιείτω.



Καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** τὸν μὲν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Λ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Λ**. ὡς δὲ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Λ**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Λ** πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Λ** πρὸς τὸν **Β**. ἀλλ' ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Κ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Κ**, οὕτως ὁ **Λ** πρὸς τὸν **Β**.

ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Λ**· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Η** πρὸς τὸν **Κ**, [οὕτως] ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**. ὁ δὲ **Η** πρὸς τὸν **Κ** λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

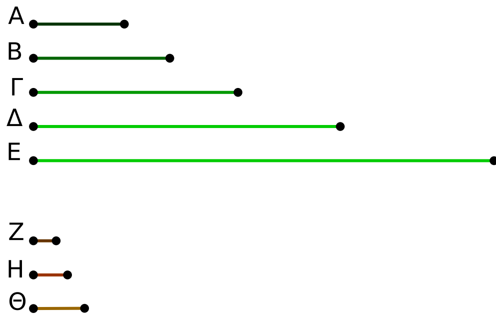
ϛʹ.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, ὁ δὲ **Α** τὸν **Β** μὴ μετρείτω· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Ὅτι μὲν οὖν οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε** ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρεῖ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω ὁ **Α** τὸν **Γ**. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** οἱ **Ζ**, **Η**, **Θ**.



καὶ ἐπεὶ οἱ **Ζ**, **Η**, **Θ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τῷ πλήθει τῶν **Ζ**, **Η**, **Θ**, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Θ**.

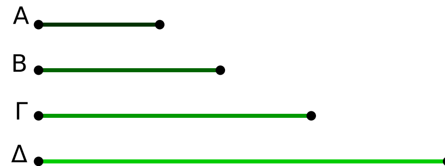
καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ **Α** τὸν **Β**, οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ **Ζ** τὸν **Η**· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ **Ζ**· ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ. καί εἰσιν οἱ **Ζ**, **Θ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [οὐδὲ ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Θ** μετρεῖ]. καί ἐστιν ὡς ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**· οὐδὲ ὁ **Α** ἄρα τὸν **Γ** μετρεῖ.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἑξῆς] ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὁ δὲ **Α** τὸν **Δ** μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρεῖ.



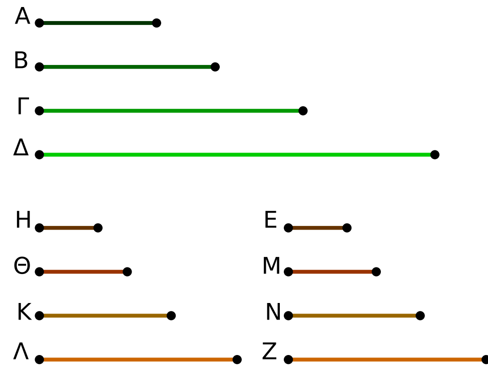
Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ **Α** τὸν **Β**, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· μετρεῖ δὲ ὁ **Α** τὸν **Δ**. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Α** τὸν **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ηʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνόλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας [αὐτοῖς] μεταξὺ κατὰ τὸ συνὲχες ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν **Α**, **Β** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ **Γ**, **Δ**, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**· λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς **Α**, **Β** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς **Ε**, **Ζ** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** οἱ **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ **Η**, **Λ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



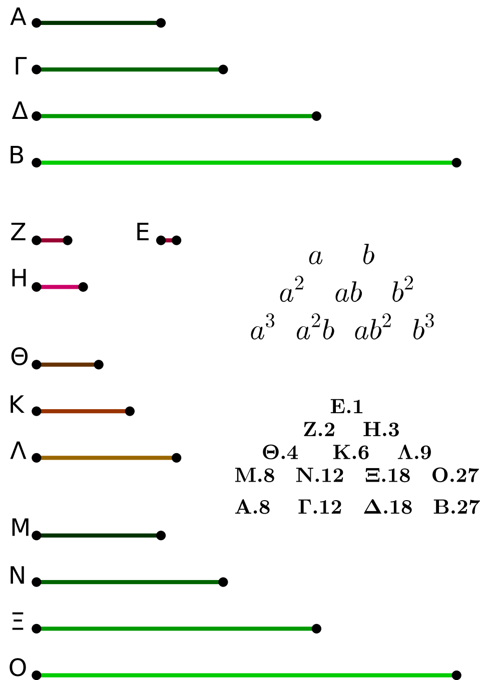
καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** τοῖς **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** τῷ πλήθει τῶν **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Λ**. ὡς δὲ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Η** πρὸς τὸν **Λ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**. οἱ δὲ **Η**, **Λ** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. ἰσάκις ἄρα ὁ **Η** τὸν **Ε** μετρεῖ καὶ ὁ **Λ** τὸν **Ζ**. ὁσάκις δὴ ὁ **Η** τὸν **Ε** μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν **Θ**, **Κ** ἑκάτερον τῶν **Μ**, **Ν** μετρείτω· οἱ **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ** ἄρα τοὺς **Ε**, **Μ**, **Ν**, **Ζ** ἰσάκις μετροῦσιν. οἱ **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ** ἄρα τοῖς **Ε**, **Μ**, **Ν**, **Ζ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν.

ἀλλὰ οἱ **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ** τοῖς **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· καὶ οἱ **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** ἄρα τοῖς **Ε**, **Μ**, **Ν**, **Ζ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· καὶ οἱ **Ε**, **Μ**, **Ν**, **Ζ** ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς **Α**, **Β** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς **Ε**, **Ζ** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ **Α**, **Β**, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ **Γ**, **Δ**, καὶ ἐκκείσθω ἡ **Ε** μονάς· λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς **Α**, **Β** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν **Α**, **Β** καὶ τῆς μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.



Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** λόγῳ ὄντες οἱ **Ζ**, **Η**, τρεῖς δὲ οἱ **Θ**, **Κ**, **Λ**, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β**. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ **Μ**, **Ν**, **Ξ**, **Ο**.

φανερὸν δή, ὅτι ὁ μὲν **Ζ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Θ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Θ** πολλαπλασιάσας τὸν **Μ** πεποίηκεν, καὶ ὁ **Η** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Λ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Λ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ο** πεποίηκεν.

καὶ ἐπεὶ οἱ **Μ**, **Ν**, **Ξ**, **Ο** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Ζ**, **Η**, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Ζ**, **Η**, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **Μ**, **Ν**, **Ξ**, **Ο** τῷ πλήθει τῶν **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β**, ἕκαστος ἄρα τῶν **Μ**, **Ν**, **Ξ**, **Ο** ἑκάστῳ τῶν **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν **Μ** τῷ **Α**, ὁ δὲ **Ο** τῷ **Β**.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Ζ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Θ** πεποίηκεν, ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Θ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Ζ** μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Ζ** κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Ζ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Ζ** τὸν **Θ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Ε** μονὰς πρὸς τὸν **Ζ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Θ**. πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Ζ** τὸν **Θ** πολλαπλασιάσας τὸν **Μ** πεποίηκεν, ὁ **Θ** ἄρα τὸν **Μ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Ζ** μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Ζ** ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ **Ε** μονὰς τὸν **Ζ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Θ** τὸν **Μ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Ε** μονὰς πρὸς τὸν **Ζ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Μ**.

ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ **Ε** μονὰς πρὸς τὸν **Ζ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Θ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **Ε** μονὰς πρὸς τὸν **Ζ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Θ** καὶ ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Μ**. ἴσος δὲ ὁ **Μ** τῷ **Α**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **Ε** μονὰς πρὸς τὸν **Ζ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Θ** καὶ ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Α**.

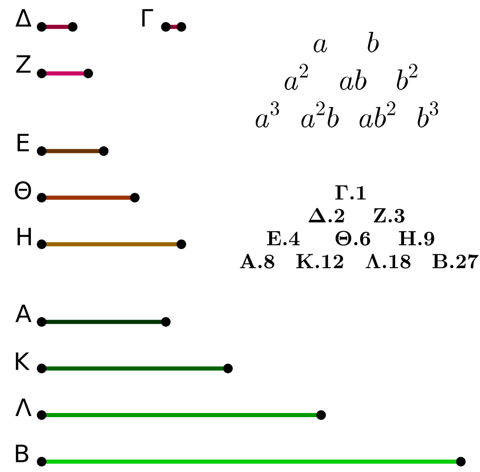
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ **Ε** μονὰς πρὸς τὸν **Η** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Λ** καὶ ὁ **Λ** πρὸς τὸν **Β**. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς **Α**, **Β** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν **Α**, **Β** καὶ μονάδος τῆς **Ε** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι′.

Ἐάν δύο ἀριθμῶν ἑκατέρου καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν **Α**, **Β** καὶ μονάδος τῆς **Γ** μεταξύ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἵ τε **Δ**, **Ε** καὶ οἱ **Ζ**, **Η**· λέγω, ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν **Α**, **Β** καὶ μονάδος τῆς **Γ** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς **Α**, **Β** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὁ **Δ** γὰρ τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Θ** ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν **Δ**, **Ζ** τὸν **Θ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Κ**, **Λ** ποιείτω. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **Γ** μονὰς πρὸς τὸν **Δ** ἀριθμόν, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, ἰσάκις ἄρα ἡ **Γ** μονὰς τὸν **Δ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Δ** τὸν **Ε**. ἡ δὲ **Γ** μονὰς τὸν **Δ** ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας· καὶ ὁ **Δ** ἄρα ἀριθμὸς τὸν **Ε** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας· ὁ **Δ** ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν.



πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **Γ** [μονὰς] πρὸς τὸν **Δ** ἀριθμὸν, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Α**, ἰσάκις ἄρα ἡ **Γ** μονὰς τὸν **Δ** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Ε** τὸν **Α**. ἡ δὲ **Γ** μονὰς τὸν **Δ** ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας· καὶ ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας· ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν **Ζ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Η** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Η** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Θ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**. καὶ ὡς ἄρα ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Δ** ἑκάτερον τῶν **Ε**, **Θ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Α**, **Κ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Κ**. ἀλλ’ ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως

ὁ **Α** πρὸς τὸν **Κ**.

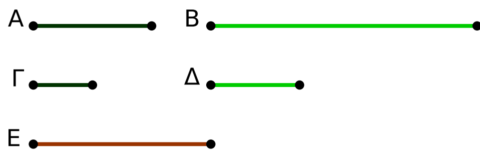
πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν **Δ**, **Ζ** τὸν **Θ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Κ**, **Λ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Λ**. ἀλλ᾽ ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Κ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Κ**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Λ**. ἔτι ἐπεὶ ὁ **Ζ** ἑκάτερον τῶν **Θ**, **Η** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Λ**, **Β** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Λ** πρὸς τὸν **Β**. ὡς δὲ ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Λ** πρὸς τὸν **Β**.

ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὅ τε **Α** πρὸς τὸν **Κ** καὶ ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Λ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Κ**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Λ** καὶ ὁ **Λ** πρὸς τὸν **Β**. οἱ **Α**, **Κ**, **Λ**, **Β** ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν **Α**, **Β** καὶ τῆς **Γ** μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς **Α**, **Β** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεσοῦνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια′.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ τοῦ μὲν **Α** πλευρὰ ἔστω ὁ **Γ**, τοῦ δὲ **Β** ὁ **Δ**· λέγω, ὅτι τῶν **Α**, **Β** εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**.



Ὁ **Γ** γὰρ τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ **Α**, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ **Γ**, ὁ **Γ** ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Δ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν.

ἐπεὶ οὖν ὁ **Γ** ἑκάτερον τῶν **Γ**, **Δ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Α**, **Ε** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Β**. καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Β**. τῶν **Α**, **Β** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**. ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ **Α**, **Ε**, **Β**, ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**. ὡς δὲ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**,

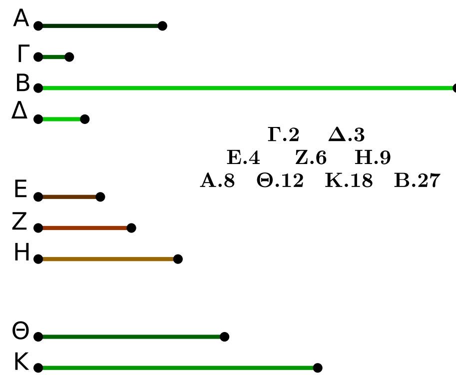
οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**. ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **Γ** πλευρὰ πρὸς τὴν **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ′.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** καὶ τοῦ μὲν **Α** πλευρὰ ἔστω ὁ **Γ**, τοῦ δὲ **Β** ὁ **Δ**· λέγω, ὅτι τῶν **Α**, **Β** δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**.

Ὁ γὰρ **Γ** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω, τὸν δὲ **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ζ** ποιείτω, ὁ δὲ **Δ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Η** ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν **Γ**, **Δ** τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Θ**, **Κ** ποιείτω.



Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ **Α**, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ **Γ**, καὶ ὁ **Γ** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν, ὁ **Γ** ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Δ** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Η** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Η** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Γ** ἑκάτερον τῶν **Γ**, **Δ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Ε**, **Ζ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**. πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Γ** ἑκάτερον τῶν **Ε**, **Ζ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Α**, **Θ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Θ**. ὡς δὲ ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Θ**.

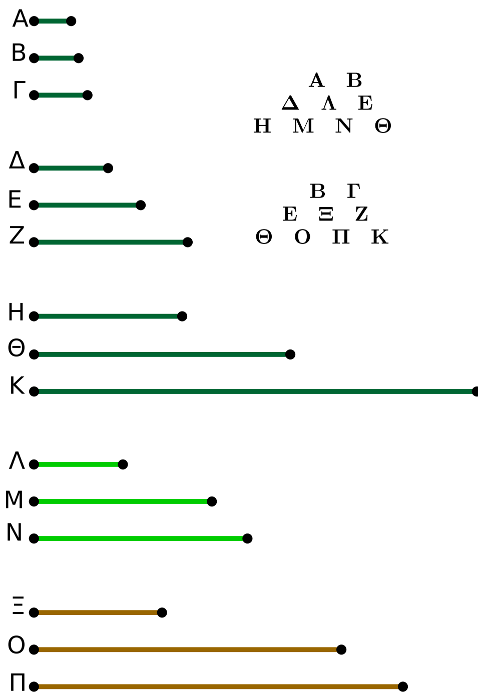
πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν **Γ**, **Δ** τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Θ**, **Κ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Κ**. πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Δ** ἑκάτερον τῶν **Ζ**, **Η** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Κ**, **Β** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Β**. ὡς δὲ ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὅ τε **Α** πρὸς τὸν **Θ** καὶ ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Κ** καὶ ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Β**. τῶν **Α**, **Β** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ **Θ**, **Κ**.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ **Α**, **Θ**, **Κ**, **Β**, ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Θ**. ὡς δὲ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· καὶ ὁ **Α** [ἄρα] πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγʹ.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται [καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, καὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς **Δ**, **Ε**, **Ζ** ποιείτωσαν, τοὺς δὲ **Δ**, **Ε**, **Ζ** πολλαπλασιάσαντες τοὺς **Η**, **Θ**, **Κ** ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι οἵ τε **Δ**, **Ε**, **Ζ** καὶ οἱ **Η**, **Θ**, **Κ** ἑξῆς ἀνάλογον εἰσιν.



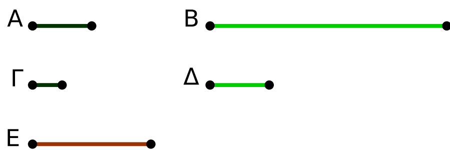
Ὁ μὲν γὰρ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Λ** ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν **Α**, **Β** τὸν **Λ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Μ**, **Ν** ποιείτω. καὶ πάλιν ὁ μὲν **Β** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ξ** ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν **Β**, **Γ** τὸν **Ξ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Ο**, **Π** ποιείτω.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι οἱ **Δ**, **Λ**, **Ε** καὶ οἱ **Η**, **Μ**, **Ν**, **Θ** ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ **Α** πρὸς τὸν **Β** λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ **Ε**, **Ξ**, **Ζ** καὶ οἱ **Θ**, **Ο**, **Π**, **Κ** ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ **Β** πρὸς τὸν **Γ** λόγῳ. καί ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**· καὶ οἱ **Δ**, **Λ**, **Ε** ἄρα τοῖς **Ε**, **Ξ**, **Ζ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ καὶ ἔτι οἱ **Η**, **Μ**, **Ν**, **Θ** τοῖς **Θ**, **Ο**, **Π**, **Κ**. καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν **Δ**, **Λ**, **Ε** πλῆθος τῷ τῶν **Ε**, **Ξ**, **Ζ** πλήθει, τὸ δὲ τῶν **Η**, **Μ**, **Ν**, **Θ** τῷ τῶν **Θ**, **Ο**, **Π**, **Κ**· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, ὡς δὲ ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Κ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ **Γ**, **Δ**, ὁ δὲ **Α** τὸν **Β** μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρεῖ.



Ὁ **Γ** γὰρ τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω· οἱ **Α**, **Ε**, **Β** ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Ε**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ **Α** τὸν **Β**, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Α** τὸν **Ε**. καί ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ**.

Πάλιν δὴ ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρεῖ. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι οἱ **Α**, **Ε**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**, μετρεῖ δὲ ὁ **Γ** τὸν **Δ**, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Α** τὸν **Ε**. καί εἰσιν οἱ **Α**, **Ε**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Α** τὸν **Β**.

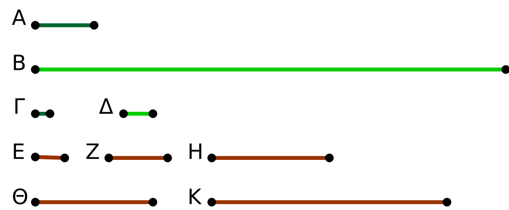
Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** κύβον τὸν **Β** μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν **Α** πλευρὰ ἔστω ὁ **Γ**, τοῦ δὲ **Β** ὁ **Δ**· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρεῖ.

Ὁ **Γ** γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Ε** ποιείτω, ὁ δὲ **Δ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Η** ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ **Γ** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ζ** [ποιείτω], ἑκάτερος δὲ τῶν **Γ**, **Δ** τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Θ**, **Κ** ποιείτω.



φανερὸν δή, ὅτι οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** καὶ οἱ **Α**, **Θ**, **Κ**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ

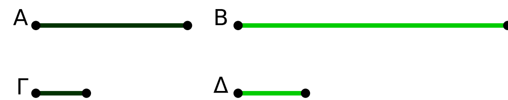
τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Θ**, **Κ**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ **Α** τὸν **Β**, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν **Θ**. καί ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ**.

Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ **Γ** τὸν **Δ**· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρήσει. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οἱ **Α**, **Θ**, **Κ**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** λόγῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρεῖ, καί ἐστιν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Θ**, καὶ ὁ **Α** ἄρα τὸν **Θ** μετρεῖ· ὥστε καὶ τὸν **Β** μετρεῖ ὁ **Α**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἔστωσαν τετρὰγωνοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ **Γ**, **Δ**, καὶ μὴ μετρείτω ὁ **Α** τὸν **Β**· λὲγω, ὅτι οὐδὲ ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρεῖ.

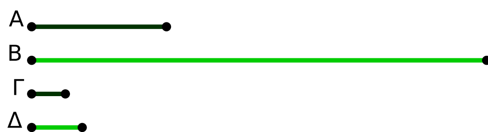


Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ **Γ** τὸν **Δ**, μετρήσει καὶ ὁ **Α** τὸν **Β**. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ **Α** τὸν **Β**· οὐδὲ ἄρα ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρήσει. Μὴ μετρείτω [δὴ] πάλιν ὁ **Γ** τὸν **Δ**· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρήσει. Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ **Α** τὸν **Β**, μετρήσει καὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ**. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ **Γ** τὸν **Δ**· οὐδ᾽ ἄρα ὁ **Α** τὸν **Β** μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** κύβον ἀριθμὸν τὸν **Β** μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν **Α** πλευρὰ ἔστω ὁ **Γ**, τοῦ δὲ **Β** ὁ **Δ**· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** τὸν **Δ** οὐ μετρήσει.

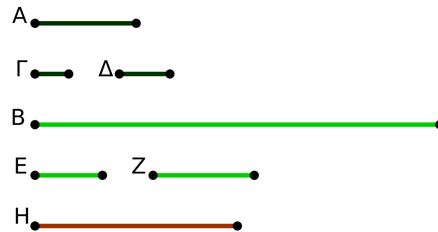


Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ **Γ** τὸν **Δ**, καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ **Α** τὸν **Β**· οὐδ᾽ ἄρα ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρεῖ. Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ **Γ** τὸν **Δ**· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρήσει. Εἰ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρεῖ, καὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ** μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ **Γ** τὸν **Δ**· οὐδ᾽ ἄρα ὁ **Α** τὸν **Β** μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ τοῦ μὲν **Α** πλευραὶ ἔστωσαν οἱ **Γ**, **Δ** ἀριθμοί, τοῦ δὲ **Β** οἱ **Ε**, **Ζ**. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**. λέγω οὖν, ὅτι τῶν **Α**, **Β** εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε** ἢ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, τουτέστιν ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον [πλευράν].



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**, ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ **Α**, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ **Γ**, **Δ**, ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Ε** τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. ὁ **Δ** δὴ τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Η** ποιείτω.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** τὸν μὲν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Η** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Η**. ἀλλ' ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**, [οὕτως] ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Η**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν μὲν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Η** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Β**. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Η**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Β**. οἱ **Α**, **Η**, **Β** ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. τῶν **Α**, **Β** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε** ἢ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**.

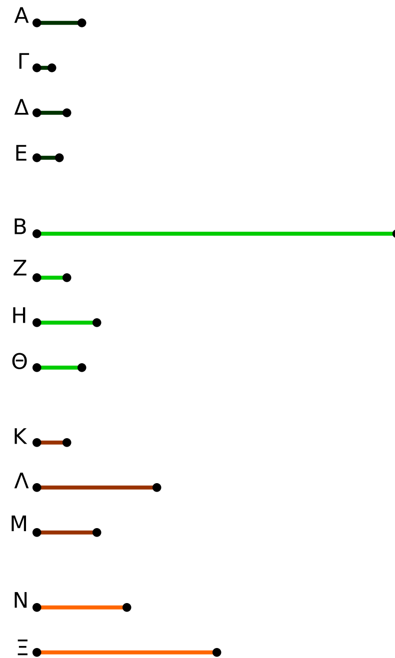
ἐπεὶ γὰρ οἱ **Α**, **Η**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν **Η**. καί ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὅ τε **Γ** πρὸς τὸν **Ε** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**. καὶ ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε** ἢ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθʹ.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ τοῦ μὲν **Α** πλευραὶ ἔστωσαν οἱ **Γ**, **Δ**, **Ε**, τοῦ δὲ **Β** οἱ **Ζ**, **Η**, **Θ**. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**, ὡς δὲ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Η** πρὸς τὸν **Θ**. λέγω, ὅτι τῶν **Α**, **Β** δύο μέσοι ἀνάλογόν ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ἔτι ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**.

Ὁ **Γ** γὰρ τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Κ** ποιείτω, ὁ δὲ **Ζ** τὸν **Η** πολλαπλασιάσας τὸν **Λ** ποιείτω. καὶ ἐπεὶ οἱ **Γ**, **Δ** τοῖς **Ζ**, **Η** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ ἐκ μὲν τῶν **Γ**, **Δ** ἐστιν ὁ **Κ**, ἐκ δὲ τῶν **Ζ**, **Η** ὁ **Λ**, οἱ **Κ**, **Λ** [ἄρα] ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν **Κ**, **Λ** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. ἔστω ὁ **Μ**. ὁ **Μ** ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν **Δ**, **Ζ**, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη.



καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** τὸν μὲν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Κ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Μ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Μ**. ἀλλ' ὡς ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Μ**, ὁ **Μ** πρὸς τὸν **Λ**. οἱ **Κ**, **Μ**, **Λ** ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η**.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**. οἱ **Κ**, **Μ**, **Λ** ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** λόγῳ καὶ τῷ τοῦ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ἔτι τῷ τοῦ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**. ἑκατερος δὴ τῶν **Ε**, **Θ** τὸν **Μ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Ν**, **Ξ** ποιείτω.

καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ **Α**, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ **Γ**, **Δ**, **Ε**, ὁ **Ε** ἄρα τὸν ἐκ τῶν **Γ**, **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. ὁ δὲ ἐκ τῶν **Γ**, **Δ** ἐστιν ὁ **Κ**· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Κ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Θ** τὸν **Λ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν **Κ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν **Μ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ν** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Μ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ν**. ὡς δὲ ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Μ**, οὕτως ὅ τε **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ἔτι ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ν**.

πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν **Ε**, **Θ** τὸν **Μ** πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν **Ν**, **Ξ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Ν** πρὸς τὸν **Ξ**. ἀλλ’ ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὅ τε **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὅ τε **Α** πρὸς τὸν **Ν** καὶ ὁ **Ν** πρὸς τὸν **Ξ**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Θ** τὸν **Μ** πολλαπλασιάσας τὸν **Ξ** πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν **Λ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Μ** πρὸς τὸν **Λ**, οὕτως ὁ **Ξ** πρὸς τὸν **Β**. ἀλλ’ ὡς ὁ **Μ** πρὸς τὸν **Λ**, οὕτως ὅ τε **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**. καὶ ὡς ἄρα ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως οὐ μόνον ὁ **Ξ** πρὸς τὸν **Β**, ἀλλὰ καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ν** καὶ ὁ **Ν** πρὸς τὸν **Ξ**. οἱ **Α**, **Ν**, **Ξ**, **Β** ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

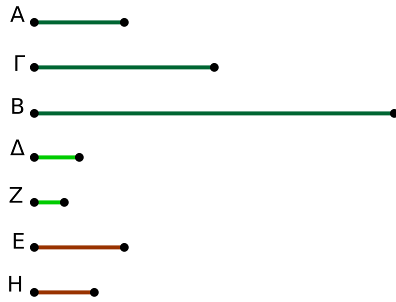
Λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ **Γ** ἀριθμὸς πρὸς τὸν **Ζ** ἢ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ἔτι ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**.

ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ **Α**, **Ν**, **Ξ**, **Β**, ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ν**. ἀλλ’ ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ν**, οὕτως ἐδείχθη ὅ τε **Γ** πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ἔτι ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**. καὶ ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ομόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ **Γ** ἀριθμὸς πρὸς τὸν **Ζ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Η** καὶ ἔτι ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν **Α**, **Β** εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ **Γ**· λέγω, ὅτι οἱ **Α**, **Β** ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.



Εἰλήφθωσαν [γὰρ] ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Γ** οἱ **Δ**, **Ε**· ἰσάκις ἄρα ὁ **Δ** τὸν **Α** μετρεῖ καὶ ὁ **Ε** τὸν **Γ**. ὁσάκις δὴ ὁ **Δ** τὸν **Α** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ζ**· ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. ὥστε ὁ **Α** ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ **Δ**, **Ζ**.

πάλιν, ἐπεὶ οἱ **Δ**, **Ε** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Γ**, **Β**, ἰσάκις ἄρα ὁ **Δ** τὸν **Γ** μετρεῖ καὶ ὁ **Ε** τὸν **Β**. ὁσάκις δὴ ὁ **Ε** τὸν **Β** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Η**. ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Η** μονάδας· ὁ **Η** ἄρα τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. ὁ **Β** ἄρα ἐπίπεδος ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ **Ε**, **Η**. οἱ **Α**, **Β** ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

λέγω δή, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ὁ **Ζ** τὸν μὲν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, τουτέστιν ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Β**. πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Ε** ἑκάτερον τῶν **Ζ**, **Η** πολλαπλασιάσας τοὺς **Γ**, **Β** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Β**. ὡς δὲ ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Η**· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Η**.

οἱ **Α**, **Β** ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν· αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

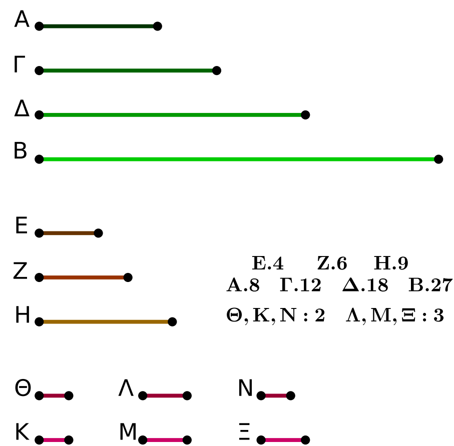
καʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν **Α**, **Β** δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ **Γ**, **Δ**· λέγω, ὅτι οἱ **Α**, **Β** ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Γ**, **Δ** τρεῖς οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η**· οἱ

ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ **Ε**, **Η** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ τῶν **Ε**, **Η** εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ **Ζ**, οἱ **Ε**, **Η** ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν.

ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν **Ε** πλευραὶ οἱ **Θ**, **Κ**, τοῦ δὲ **Η** οἱ **Λ**, **Μ**. φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ πρὸ τούτου, ὅτι οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ **Θ** πρὸς τὸν **Λ** λόγῳ καὶ τῷ τοῦ **Κ** πρὸς τὸν **Μ**. καὶ ἐπεὶ οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Γ**, **Δ**, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η** τῷ πλήθει τῶν **Α**, **Γ**, **Δ**, διʼ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Η**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Δ**.



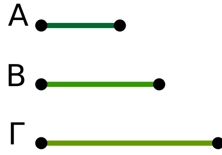
οἱ δὲ **Ε**, **Η** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ **Ε** τὸν **Α** μετρεῖ καὶ ὁ **Η** τὸν **Δ**. ὁσάκις δὴ ὁ **Ε** τὸν **Α** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ν**. ὁ **Ν** ἄρα τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. ὁ δὲ **Ε** ἐστιν ὁ ἐκ τῶν **Θ**, **Κ**· ὁ **Ν** ἄρα τὸν ἐκ τῶν **Θ**, **Κ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ **Α**, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ **Θ**, **Κ**, **Ν**.

πάλιν, ἐπεὶ οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η** ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Γ**, **Δ**, **Β**, ἰσάκις ἄρα ὁ **Ε** τὸν **Γ** μετρεῖ καὶ ὁ **Η** τὸν **Β**. ὁσάκις δὴ ὁ **Ε** τὸν **Γ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ. ὁ **Η** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν **Η** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. ὁ δὲ **Η** ἐστιν ὁ ἐκ τῶν **Λ**, **Μ**· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν **Λ**, **Μ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ **Β**, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ **Λ**, **Μ**, Ξ· οἱ **Α**, **Β** ἄρα στερεοί εἰσιν.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ **Ν**, Ξ τὸν **Ε** πολλαπλασιάσαντες τοὺς **Α**, **Γ** πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ν** πρὸς τὸν Ξ, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, τουτέστιν ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**. ἀλλʼ ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Ζ**, ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Λ** καὶ ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Μ**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Λ**, οὕτως ὁ **Κ** πρὸς τὸν **Μ** καὶ ὁ **Ν** πρὸς τὸν Ξ. καί εἰσιν οἱ μὲν **Θ**, **Κ**, **Ν** πλευραὶ τοῦ **Α**, οἱ δὲ Ξ, **Λ**, **Μ** πλευραὶ τοῦ **Β**. οἱ **Α**, **Β** ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβʹ.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.



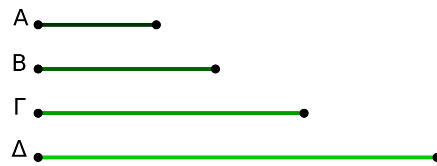
Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, ὁ δὲ πρῶτος ὁ **Α** τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ **Γ** τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν **Α**, **Γ** εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ **Β**, οἱ **Α**, **Γ** ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τετράγωνος δὲ ὁ **Α**· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ **Γ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγʹ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὁ δὲ **Α** κύβος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Δ** κύβος ἐστίν.

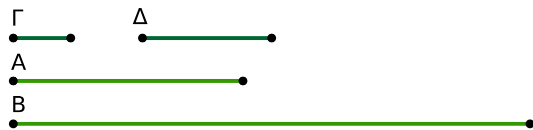


Ἐπεὶ γὰρ τῶν **Α**, **Δ** δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ οἱ **Β**, **Γ**, οἱ **Α**, **Δ** ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ ὁ **Α**· κύβος ἄρα καὶ ὁ **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ **Γ** πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν **Δ**, ὁ δὲ **Α** τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Β** τετράγωνός ἐστιν.



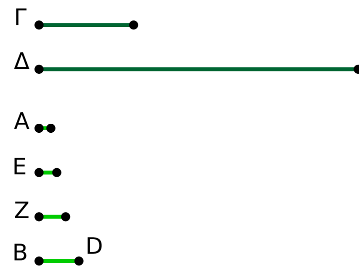
Ἐπεὶ γὰρ οἱ **Γ**, **Δ** τετράγωνοί εἰσιν, οἱ **Γ**, **Δ** ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τῶν **Γ**, **Δ** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ τῶν **Α**, **Β** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὁ **Α** τετράγωνος· καὶ ὁ **Β** ἄρα τετράγωνός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ **Γ** πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν **Δ**, κύβος δὲ ἔστω ὁ **Α**· λέγω [δή], ὅτι καὶ ὁ **Β** κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ **Γ**, **Δ** κύβοι εἰσίν, οἱ **Γ**, **Δ** ὅμοιοι στερεοί εἰσιν· τῶν **Γ**, **Δ** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς **Γ**, **Δ** μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥστε καὶ τῶν **Α**, **Β** δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ **Ε**, **Ζ**.

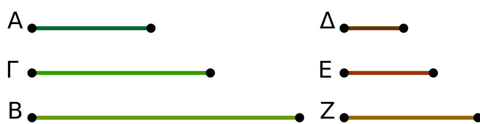


ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Ε**, **Ζ**, **Β** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστι κύβος ὁ **Α**, κύβος ἄρα καὶ ὁ **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ΄.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**· λέγω, ὅτι ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

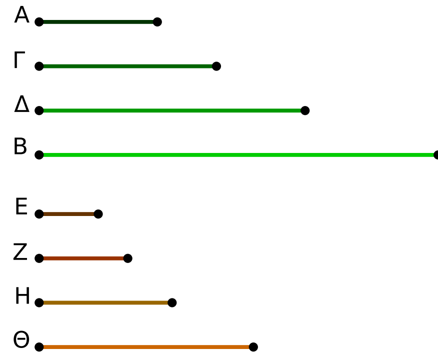


Ἐπεὶ γὰρ οἱ **Α**, **Β** ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, τῶν **Α**, **Β** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐμπιπτέτω καὶ ἔστω ὁ **Γ**, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Γ**, **Β** οἱ **Δ**, **Ε**, **Ζ**· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ **Δ**, **Ζ** τετράγωνοί εἰσιν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ζ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, καί εἰσιν οἱ **Δ**, **Ζ** τετράγωνοι, ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ′.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**· λέγω, ὅτι ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β** λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.



Ἐπεὶ γὰρ οἱ **Α**, **Β** ὅμοιοι στερεοί εἰσιν, τῶν **Α**, **Β** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ **Γ**, **Δ**, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Γ**, **Δ**, **Β** ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος οἱ **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ**· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ **Ε**, **Θ** κύβοι εἰσίν.

καί ἐστιν ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Θ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ ὁ **Α** ἄρα πρὸς τὸν **Β** λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

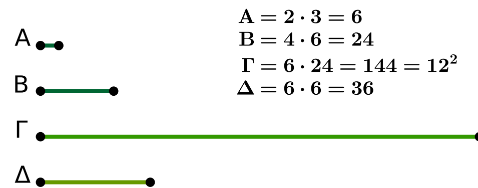
ΒΙΒΛΙΟ 9

α'.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** τετράγωνός ἐστιν.

Ὁ γὰρ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω. ὁ **Δ** ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Γ**. καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β** ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί, τῶν **Α**, **Β** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός.

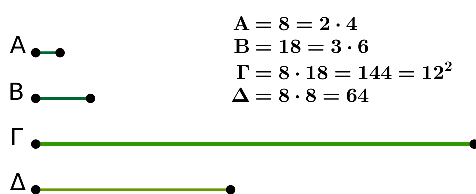


ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥστε καὶ τῶν **Δ**, **Γ** εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστι τετράγωνος ὁ **Δ**· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ **Γ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι οἱ **Α**, **Β** ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.



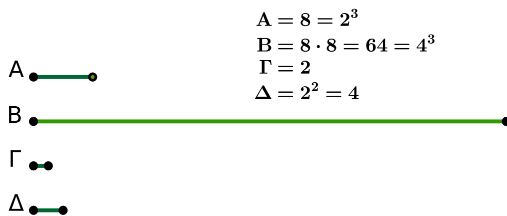
Ὁ γὰρ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω· ὁ **Δ** ἄρα τετράγωνός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Γ**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ **Γ**, οἱ **Δ**, **Γ** ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν.

τῶν **Δ**, **Γ** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. καί ἐστιν ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ τῶν **Α**, **Β** ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν [οἱ] ἀριθμοί· οἱ ἄρα **Α**, **Β** ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ **Β** κύβος ἐστίν.



Εἰλήφθω γὰρ τοῦ **Α** πλευρὰ ὁ **Γ**, καὶ ὁ **Γ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω. φανερὸν δή ἐστιν, ὅτι ὁ **Γ** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ **Γ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, ὁ **Γ** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας.

ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**. πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν, ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Γ** μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν **Γ** κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Α**.

ἀλλ᾽ ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ** καὶ ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Α**. τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ **Α** ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ οἱ **Γ**, **Δ**.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν, ὁ **Α** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας· μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν **Α** κατὰ τὰς ἐν αὑτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**.

τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ **Α** δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· καὶ τῶν **Α**, **Β** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. καί ἐστιν ὁ **Α** κύβος· καὶ ὁ **Β** ἄρα κύβος ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

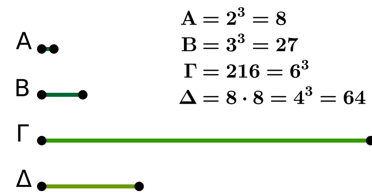
δʹ.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** κύβον ἀριθμὸν τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω· ὁ **Δ** ἄρα κύβος ἐστίν.

καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Γ**. καὶ ἐπεὶ οἱ **Α**, **Β** κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ **Α**, **Β**.

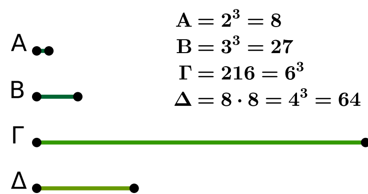


τῶν **Α**, **Β** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τῶν **Δ**, **Γ** δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ **Δ**· κύβος ἄρα καὶ ὁ **Γ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** ἀριθμόν τινα τὸν **Β** πολλαπλασιάσας κύβον τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ **Β** κύβος ἐστίν.



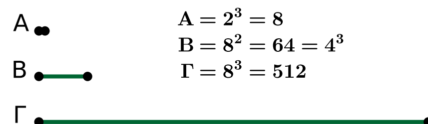
Ὁ γὰρ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω· κύβος ἄρα ἐστίν ὁ **Δ**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Γ**.

καὶ ἐπεὶ οἱ **Δ**, **Γ** κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν **Δ**, **Γ** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Γ**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ τῶν **Α**, **Β** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ **Α**· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν **Β** ποιείτω· λέγω, ὅτι καὶ ὁ **Α** κύβος ἐστίν.



Ὁ γὰρ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ὁ **Γ** ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν

Β πεποίηκεν, ὁ **Α** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας.

μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν **Α** κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**.

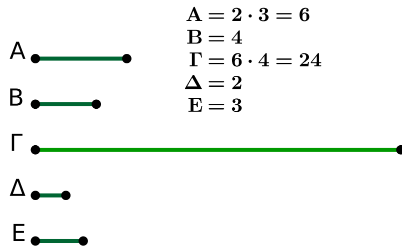
καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ὁ **Β** ἄρα τὸν **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Α** μονάδας. μετρεὶ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν **Α** κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· καὶ ὡς ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**.

καὶ ἐπεὶ οἱ **Β**, **Γ** κύβοι εἰσίν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν **Β**, **Γ** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**. καὶ τῶν **Α**, **Β** ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν κύβος ὁ **Β**· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ **Α**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** ἀριθμόν τινα τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** στερεός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Α** σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ **Δ**, καὶ ὁσάκις ὁ **Δ** τὸν **Α** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Ε**.

ἐπεὶ οὖν ὁ **Δ** τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Ε** μονάδας, ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ὁ δὲ **Α** ἐστιν ὁ ἐκ τῶν **Δ**, **Ε**, ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Δ**, **Ε** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν.

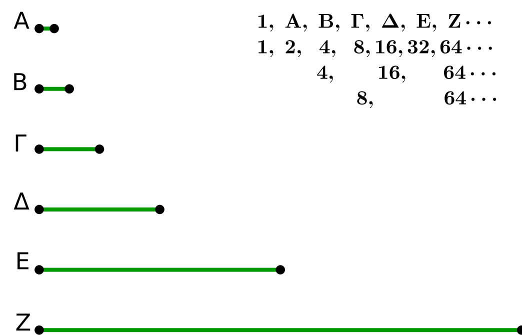
ὁ **Γ** ἄρα στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ **Δ**, **Ε**, **Β**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **Ζ**· λέγω, ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ **Β** τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ **Γ** κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ **Ζ** κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Α** τὸν **Β**. ἡ δὲ μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ **Α** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Α** μονάδας. ὁ **Α** ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ **Β**.



καὶ ἐπεὶ οἱ **Β**, **Γ**, **Δ** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ **Β** τετράγωνός ἐστιν, καὶ ὁ **Δ** ἄρα τετράγωνός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Ζ** τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ **Γ** κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Β** τὸν **Γ**. ἡ δὲ μονὰς τὸν **Α** ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Α** μονάδας· καὶ ὁ **Β** ἄρα τὸν **Γ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Α** μονάδας· ὁ **Α** ἄρα τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ **Α** ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν, τὸν δὲ **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ **Γ**. καὶ ἐπεὶ οἱ **Γ**, **Δ**, **Ε**, **Ζ** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ **Γ** κύβος ἐστίν, καὶ ὁ **Ζ** ἄρα κύβος ἐστίν.

ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἑξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **Ζ**, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ **Α** τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Α
Β
Γ
Δ
Ε
Ζ

1, A, B, Γ, Δ, E, Z···
1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096···

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ **Β** τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαπλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω [δή], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

ἐπεὶ γὰρ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ **Α** τετράγωνος, καὶ ὁ **Γ** [ἄρα] τετράγωνος ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ [καὶ] οἱ **Β**, **Γ**, **Δ** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ **Β** τετράγωνος, καὶ ὁ **Δ** [ἄρα] τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ **Α** κύβος· λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ **Γ** κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω [δή], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

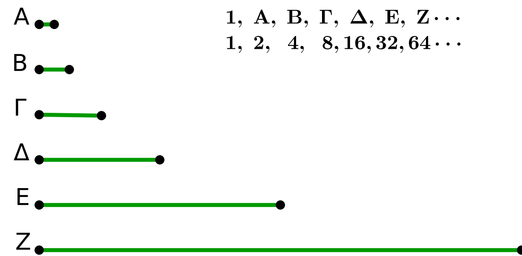
ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν **Α** μετρεῖ καὶ ὁ **Α** τὸν **Β**. ἡ δὲ μονὰς τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ **Α** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ **Α** ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. καί ἐστιν ὁ **Α** κύβος.

ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστίν· καὶ ὁ **Β** ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καί ἐστιν ὁ **Α** κύβος, καὶ ὁ **Δ** ἄρα κύβος ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **Ε** κύβος ἐστίν, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι′.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἑξῆς] ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ᾿ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **Ζ**, ὁ μετὰ τὴν μονάδα ὁ **Α** μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τὴς μονάδος [καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων].



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ **Γ** τετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ **Β** τετράγωνος· οἱ **Β**, **Γ** ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**· οἱ **Α**, **Β** ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ **Α**, **Β** ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. καί ἐστι τετράγωνος ὁ **Β**· τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ **Α**· ὅπερ οὐχ ὑπέκειτο. οὐκ ἄρα ὁ **Γ** τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾿ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ **Α** κύβος. λέγω, ὅτι οὐδ᾿ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

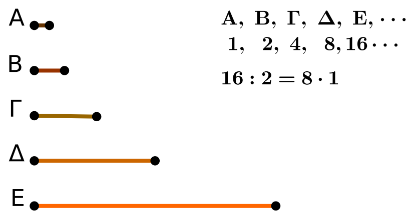
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ **Δ** κύβος. ἔστι δὲ καὶ ὁ **Γ** κύβος· τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος. καί ἐστιν ὡς ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**· καὶ ὁ **Β** ἄρα πρὸς τὸν **Γ** λόγον ἔχει, ὃν κύβος πρὸς κύβον. καί ἐστιν ὁ **Γ** κύβος· καὶ ὁ **Β** ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν **Α**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ἡ δὲ μονὰς τὸν **Α** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ ὁ **Α** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ **Α** ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν **Β** πεποίηκεν.

ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται. κύβος ἄρα καὶ ὁ **Α**· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ **Δ** κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾿ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς **Α** ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**· λέγω, ὅτι τῶν **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε** ὁ ἐλάχιστος ὁ **Β** τὸν **Ε** μετρεῖ κατά τινα τῶν **Γ**, **Δ**.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ **Α** μονὰς πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, ἰσάκις ἄρα ἡ **Α** μονὰς τὸν **Β** ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ **Δ** τὸν **Ε**· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ **Α** μονὰς τὸν **Δ** μετρεῖ καὶ ὁ **Β** τὸν **Ε**. ἡ δὲ **Α** μονὰς τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ **Β** ἄρα τὸν **Ε** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Δ** μονάδας· ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ **Β** τὸν μείζονα τὸν **Ε** μετρεῖ κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Π ό ρ ι σ μ α : Καὶ φανερόν, ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μονάδος, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ὁ καθ᾽ ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμένου ἐπὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

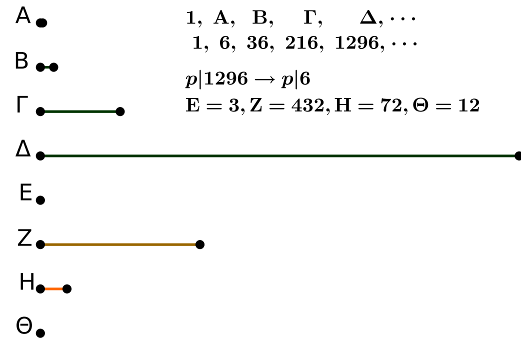
Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**· λέγω, ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ **Δ** πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ **Α** μετρηθήσεται.

Μετρείσθω γὰρ ὁ **Δ** ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ **Ε**· λέγω, ὅτι ὁ **Ε** τὸν **Α** μετρεῖ. μὴ γάρ· καί ἐστιν ὁ **Ε** πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν· οἱ **Ε**, **Α** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Ζ**· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν.

πάλιν, ἐπεὶ ὁ **Α** τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Γ** μονάδας, ὁ **Α** ἄρα τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Ε** τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας

τὸν **Δ** πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Γ** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Ε**, **Ζ**. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**, ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Γ**. οἱ δὲ **Α**, **Ε** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ **Ε** τὸν **Γ**.

μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Η**· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Η** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Β** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Ε**, **Η**. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**, ὁ **Η** πρὸς τὸν **Β**. οἱ δὲ **Α**, **Ε** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ **Ε** τὸν **Β**. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Θ**· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Θ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν.



ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Ε**, **Θ** ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ **Α**. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Α**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Θ**. οἱ δὲ **Α**, **Ε** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ **Ε** τὸν **Α** ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ· ὅπερ ἀδύνατον.

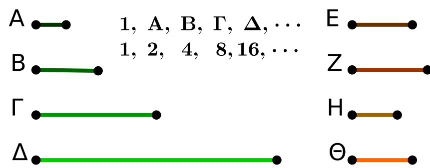
οὐκ ἄρα οἱ **Ε**, **Α** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. σύνθετοι ἄρα. οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ [πρώτου] ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται. καὶ ἐπεὶ ὁ **Ε** πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ, ὁ **Ε** ἄρα τοὺς **Α**, **Ε** μετρεῖ· ὥστε ὁ **Ε** τὸν **Α** μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **Δ**· ὁ **Ε** ἄρα τοὺς **Α**, **Δ** μετρεῖ.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ **Δ** πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ **Α** μετρηθήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς [ἄλλου] μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ **Α** πρῶτος ἔστω· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ **Δ** ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**.



Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ **Ε**, καὶ ὁ **Ε** μηδενὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἔστω ὁ αὐτός. φανερὸν δή, ὅτι ὁ **Ε** πρῶτος οὔκ ἐστιν. εἰ γὰρ ὁ **Ε** πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν **Δ**, καὶ τὸν **Α** μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ **Ε** πρῶτός ἐστιν.

σύνθετος ἄρα. πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ **Ε** ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δή, ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου μετρηθήσεται πλὴν τοῦ **Α**.

εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ **Ε**, ὁ δὲ **Ε** τὸν **Δ** μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν **Δ** μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν **Α** μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ **Α** ἄρα τὸν **Ε** μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Ζ**.

λέγω, ὅτι ὁ **Ζ** οὐδενὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ **Ζ** ἑνὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ αὐτὸς καὶ μετρεῖ τὸν **Δ** κατὰ τὸν **Ε**, καὶ εἷς ἄρα τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τὸν **Δ** μετρεῖ κατά τὸν **Ε**. ἀλλὰ εἷς τῶν **Α**, **Β**, **Γ** τὸν **Δ** μετρεῖ κατά τινα τῶν **Α**, **Β**, **Γ**· καὶ ὁ **Ε** ἄρα ἑνὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ αὐτός· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ **Ζ** ἑνὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ αὐτός.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι μετρεῖται ὁ **Ζ** ὑπὸ τοῦ **Α**, δεικνύντες πάλιν, ὅτι ὁ **Ζ** οὔκ ἐστι πρῶτος. εἰ γὰρ, καὶ μετρεῖ τὸν **Δ**, καὶ τὸν **Α** μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ **Ζ**· σύνθετος ἄρα. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ **Ζ** ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δή, ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται πλὴν τοῦ **Α**.

εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν **Ζ** μετρεῖ, ὁ δὲ **Ζ** τὸν **Δ** μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν **Δ** μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν **Α** μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ **Α** ἄρα τὸν **Ζ** μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὸν **Ζ**, ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Α** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Γ** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Ε**, **Ζ**. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **Ζ** πρὸς τὸν **Γ**. ὁ δὲ **Α** τὸν **Ε** μετρεῖ· καὶ ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Γ** μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Η**.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ **Η** οὐδενὶ τῶν **Α**, **Β** ἐστιν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ **Α**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Ζ** τὸν **Γ** μετρεῖ κατὰ τὸν **Η**, ὁ **Ζ** ἄρα τὸν **Η** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Β** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Ζ**, **Η**. ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Ζ**, ὁ **Η** πρὸς τὸν **Β**. μετρεῖ δὲ ὁ **Α** τὸν **Ζ**· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Η** τὸν **Β**. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Θ**.

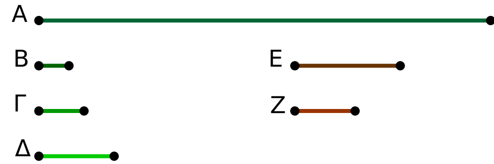
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ **Θ** τῷ **Α** οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ **Η** τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὸν **Θ**, ὁ **Η** ἄρα τὸν **Θ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Α** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ **Θ**, **Η** ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ **Α** τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Θ** πρὸς τὸν **Α**, ὁ **Α** πρὸς τὸν **Η**. μετρεῖ δὲ ὁ **Α** τὸν **Η**· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Θ** τὸν **Α** πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ **Δ** ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν **Β**, **Γ**, **Δ** μετρείσθω· λέγω, ὅτι ὁ **Α** ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν **Β**, **Γ**, **Δ**.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ **Ε**, καὶ ὁ **Ε** μηδενὶ τῶν **Β**, **Γ**, **Δ** ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ **Ε** τὸν **Α** μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Ζ**· ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Ζ** πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν.



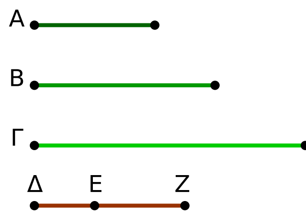
καὶ μετρεῖται ὁ **Α** ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν **Β**, **Γ**, **Δ**. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ **Β**, **Γ**, **Δ** ἄρα ἕνα τῶν **Ε**, **Ζ** μετρήσουσιν.

τὸν μὲν οὖν **Ε** οὐ μετρήσουσιν· ὁ γὰρ **Ε** πρῶτός ἐστι καὶ οὐδενὶ τῶν **Β**, **Γ**, **Δ** ὁ αὐτός. τὸν **Ζ** ἄρα μετροῦσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ **Α**· ὅπερ ἀδύνατον. ὁ γὰρ **Α** ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν **Β**, **Γ**, **Δ** μετρούμενος. οὐκ ἄρα τὸν **Α** μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς παρὲξ τῶν **Β**, **Γ**, **Δ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ **Α**, **Β**, **Γ**· λέγω, ὅτι τῶν **Α**, **Β**, **Γ** δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοι εἰσιν, οἱ μὲν **Α**, **Β** πρὸς τὸν **Γ**, οἱ δὲ **Β**, **Γ** πρὸς τὸν **Α** καὶ ἔτι οἱ **Α**, **Γ** πρὸς τὸν **Β**.



Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** δύο οἱ **ΔΕ**, **ΕΖ**. φανερὸν δή, ὅτι ὁ μὲν **ΔΕ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Α** πεποίηκεν, τὸν δὲ **ΕΖ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν, καὶ ἔτι ὁ **ΕΖ** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ οἱ **ΔΕ**, **ΕΖ** ἐλάχιστοί εἰσιν, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ **ΔΖ** ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** πρῶτός ἐστιν.

ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **ΔΕ** πρὸς τὸν **ΕΖ** πρῶτός ἐστιν· οἱ **ΔΖ**, **ΔΕ** ἄρα πρὸς τὸν **ΕΖ** πρῶτοί εἰσιν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν **ΖΔ**, **ΔΕ** πρὸς τὸν **ΕΖ** πρῶτός ἐστιν· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν **ΖΔ**, **ΔΕ** πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ **ΕΖ** πρῶτός ἐστιν. [ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν].

ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν **ΖΔ**, **ΔΕ** ὁ ἀπὸ τοῦ **ΔΕ** ἐστι μετὰ τοῦ ἐκ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ**· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ **ΔΕ** μετὰ τοῦ ἐκ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ **ΕΖ** πρῶτός ἐστιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ **ΔΕ** ὁ **Α**, ὁ δὲ ἐκ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ὁ **Β**, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ **ΕΖ** ὁ **Γ**· οἱ **Α**, **Β** ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν **Γ** πρῶτοί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ **Β**, **Γ** πρὸς τὸν **Α** πρῶτοί εἰσιν.

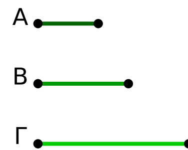
λέγω δή, ὅτι καὶ οἱ **Α**, **Γ** πρὸς τὸν **Β** πρῶτοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ **ΔΖ** πρὸς ἑκάτερον τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ **ΔΖ** πρὸς τὸν ἐκ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ **ΔΖ** ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ**· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** πρῶτοί [εἰσι]. διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ **ΔΕ**, **ΕΖ** πρὸς τὸν ὑπὸ **ΔΕ**, **ΕΖ** πρῶτοί εἰσιν. ἔτι διελόντι

οἱ ἀπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ **ΔΕ**, **ΕΖ** πρῶτοί εἰσιν. καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ **ΔΕ** ὁ **Α**, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ὁ **Β**, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ **ΕΖ** ὁ **Γ**. οἱ **Α**, **Γ** ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν **Β** πρῶτοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς ἄλλον τινά.

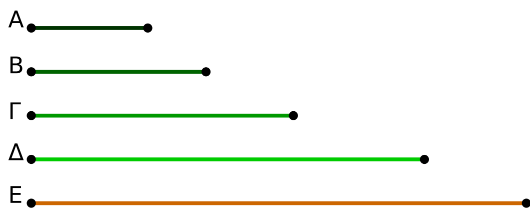


Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**. οἱ δὲ **Α**, **Β** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ **Α** τὸν **Β** ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ **Α** ἄρα τοὺς **Α**, **Β** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ **Α**, **Δ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς ἄλλον τινά.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Δ**, ὁ **Β** πρὸς τὸν **Ε**. οἱ δὲ **Α**, **Δ** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ **Α** τὸν **Β**. καί ἐστιν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Β** πρὸς

τὸν **Γ**. καὶ ὁ **Β** ἄρα τὸν **Γ** μετρεῖ΄· ὥστε καὶ ὁ **Α** τὸν **Γ** μετρεῖ.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, μετρεῖ δὲ ὁ **Β** τὸν **Γ**, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ **Γ** τὸν **Δ**. ἀλλ' ὁ **Α** τὸν **Γ** ἐμέτρει· ὥστε ὁ **Α** καὶ τὸν **Δ** μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν. ὁ **Α** ἄρα τοὺς **Α**, **Δ** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

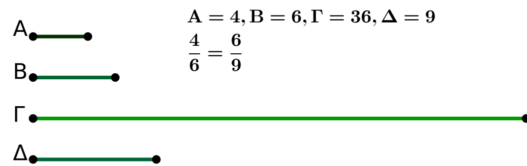
οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς ἄλλον τινά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ **Α**, **Β** ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὔ. καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ **Α**, **Β** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ **Β** ἑαυτον πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω. ὁ **Α** δὴ τὸν **Γ** ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ.

μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν **Δ**· ὁ **Α** ἄρα τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν. ἀλλα μὴν καὶ ὁ **Β** ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Δ** ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ **Β**. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Β** πρὸς τὸν **Δ**· τοῖς **Α**, **Β** ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον προσηύρηται ὁ **Δ**.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ **Α** τὸν **Γ**· λέγω, ὅτι τοῖς **Α**, **Β** ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν.

εἰ γὰρ δυνατόν, προσηυρήσθω ὁ **Δ**. ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Δ** ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ **Β**. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ **Β** ἐστιν ὁ **Γ**· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Δ** ἴσος ἐστὶ τῷ **Γ**. ὥστε ὁ **Α** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν· ὁ **Α** ἄρα τὸν **Γ** μετρεῖ κατὰ τὸν **Δ**. ἀλλα μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν· ὅπερ ἄτοπον.

οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς **Α**, **Β** τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ **Α** τὸν **Γ** μὴ μετρῇ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ′.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

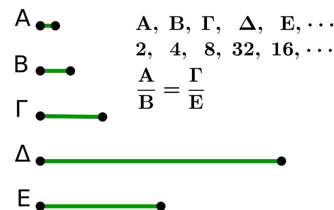
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἤτοι οὖν οὔκ εἰσιν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὔτε ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ καὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ μὲν οὖν οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ **Α**, **Γ** πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν.

μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἑξῆς ἀνάλογον τῶν ἀκρῶν πάλιν ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ **Δ**, ὥστε εἶναι ὡς τὸν **Α** πρὸς τὸν **Β**, τὸν **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ὁ **Α** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Δ**, ὡς δὲ ὁ **Β** πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Δ** πρὸς τὸν **Ε**, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ**, ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**. οἱ δὲ **Α**, **Γ** πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ **Α** τὸν **Γ** ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ **Α** ἄρα τοὺς **Α**, **Γ** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἀλλά δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ **Α**, **Β**, **Γ** ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ **Α**, **Γ** μὴ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. ὁ γὰρ **Β** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω· ὁ **Α** ἄρα τὸν **Δ** ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν **Ε**· ὁ **Α** ἄρα τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Β** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Ε** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Β**, **Γ**. ἀνάλογον ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ **Α** πρὸς

τὸν **Β**, ὁ **Γ** πρὸς τὸν **Ε**· τοὶς **Α**, **Β**, **Γ** ἄρα τέταρτος ἀνάλογον προσηύρηται ὁ **Ε**.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ **Α** τὸν **Δ**· λέγω, ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν.

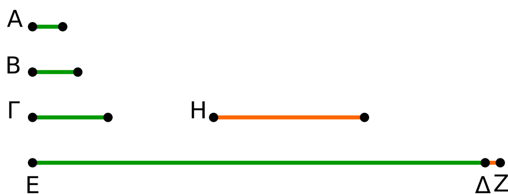
εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ **Ε**· ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Ε** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Β**, **Γ**. ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ **Δ**· καὶ ὁ ἐκ τῶν **Α**, **Ε** ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ **Δ**. ὁ **Α** ἄρα τὸν **Ε** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** πεποίηκεν· ὁ **Α** ἄρα τὸν **Δ** μετρεῖ κατὰ τὸν **Ε**· ὥστε μετρεῖ ὁ **Α** τὸν **Δ**. ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνάτον ἐστι τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ **Α** τὸν **Δ** μὴ μετρῇ.

ἀλλὰ δὴ οἱ **Α**, **Β**, **Γ** μήτε ἑξῆς ἔστωσαν ἀνάλογον μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ ὁ **Β** τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Δ** ποιείτω. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ **Α** τὸν **Δ**, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**· λέγω, ὅτι τῶν **Α**, **Β**, **Γ** πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.



Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω **ΔΕ**, καὶ προσκείσθω τῷ **ΔΕ** μονὰς ἡ **ΔΖ**. ὁ δὴ **ΕΖ** ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **ΕΖ** πλείους τῶν **Α**, **Β**, **Γ**.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ **ΕΖ** πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ **Η**· λέγω, ὅτι ὁ **Η** οὐδενὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ αὐτός.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ **Α**, **Β**, **Γ** τὸν **ΔΕ** μετροῦσιν· καὶ ὁ **Η** ἄρα τὸν **ΔΕ** μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **ΕΖ**· καὶ λοιπὴν τὴν **ΔΖ** μονάδα μετρήσει ὁ **Η** ἀριθμὸς ὤν· ὅπερ ἄτοπον.

οὐκ ἄρα ὁ **Η** ἑνὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν **Α**, **Β**, **Γ** οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Η**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ **ΑΕ** ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ** ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ **ΑΕ** ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ **ΑΕ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὁ ὅλος ἄρτιος ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος οἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ**· λέγω, ὅτι ὅλος ὁ **ΑΕ** ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΕ** περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ᾽ ἑκάστου ἕκαστος τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον. καὶ ὅλος ἄρα ὁ **ΑΕ** ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ΄.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὁ ὅλος περισσὸς ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοί, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**· λέγω, ὅτι καὶ ὅλος ὁ **ΑΔ** περισσός ἐστιν.



Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ **ΓΔ** μονὰς ἡ **ΔΕ**· λοιπὸς ἄρα ὁ **ΓΕ** ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ **ΓΑ** ἄρτιος· καὶ ὅλος ἄρα ὁ **ΑΕ** ἄρτιός ἐστιν. καί ἐστι μονὰς ἡ **ΔΕ**. περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ **ΑΔ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδʹ.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ **ΑΒ** ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ **ΓΑ** ἄρτιός ἐστιν.



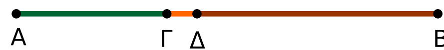
Ἐπεὶ γὰρ ὁ **ΑΒ** ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **ΒΓ** ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς [ὁ **ΓΑ** ἔχει μέρος ἥμισυ] ἄρτιος [ἄρα] ἐστὶν ὁ **ΑΓ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κεʹ.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ **ΑΒ** περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ **ΓΑ** περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **ΒΓ** μονὰς ἡ **ΓΔ**· ὁ **ΔΒ** ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ **ΑΒ** ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ **ΑΔ** ἄρτιός ἐστιν. καί ἐστι μονὰς ἡ **ΓΔ**· ὁ **ΓΑ** ἄρα περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κϛʹ.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ **ΑΒ** περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ **ΓΑ** ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ **ΑΒ** περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ **ΒΔ**· λοιπὸς ἄρα ὁ **ΑΔ** ἄρτιός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ **ΓΔ** ἄρτιός ἐστιν· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ **ΓΑ** ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ **ΑΒ** ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ **ΒΓ**· λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ **ΓΑ** περισσός ἐστιν.

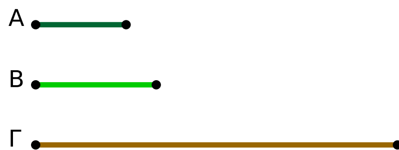
Ἀφῃρήσθω [γὰρ] μονὰς ἡ **ΑΔ**· ὁ **ΔΒ** ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ **ΒΓ** ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ **ΓΔ** ἄρτιός ἐστιν. περισσὸς ἄρα ὁ **ΓΑ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κη΄.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** ἄρτιον τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** ἄρτιός ἐστιν.



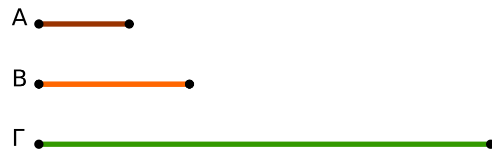
Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ὁ **Γ** ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ **Β**, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ **Α** μονάδες. καί ἐστιν ὁ **Β** ἄρτιος· ὁ **Γ** ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ **Γ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** περισσὸν τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** ποιείτω· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** περισσός ἐστιν.

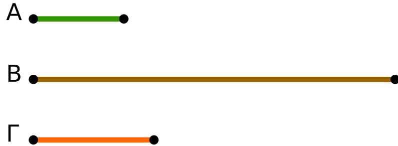
Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Β** πολλαπλασιάσας τὸν **Γ** πεποίηκεν, ὁ **Γ** ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ **Β**, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ **Α** μονάδες. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν **Α**, **Β** περισσός· ὁ **Γ** ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν. ὥστε ὁ **Γ** περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



λʹ.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** ἄρτιον τὸν **Β** μετρείτω· λέγω, ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.



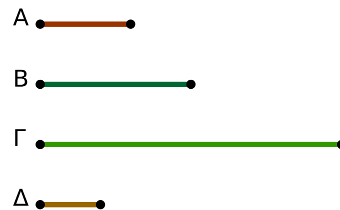
Ἐπεὶ γὰρ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν **Γ**· λέγω, ὅτι ὁ **Γ** οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ ἐπεὶ ὁ **Α** τὸν **Β** μετρεῖ κατὰ τὸν **Γ**, ὁ **Α** ἄρα τὸν **Γ** πολλαπλασιάσας τὸν **Β** πεποίηκεν. ὁ **Β** ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν. ὁ **Β** ἄρα περισσός ἐστιν· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος. οὐκ ἄρα ὁ **Γ** περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ **Γ**. ὥστε ὁ **Α** τὸν **Β** μετρεῖ ἀρτιάκις. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λαʹ.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ **Α** πρός τινα ἀριθμὸν τὸν **Β** πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ **Β** διπλασίων ἔστω ὁ **Γ**· λέγω, ὅτι ὁ **Α** [καὶ] πρὸς τὸν **Γ** πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν [οἱ **Α**, **Γ**] πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ **Δ**. καί ἐστιν ὁ **Α** περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ **Δ**. καὶ ἐπεὶ ὁ **Δ** περισσὸς ὢν τὸν **Γ** μετρεῖ, καί ἐστιν ὁ **Γ** ἄρτιος, καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ **Γ** μετρήσει [ὁ **Δ**]. τοῦ δὲ **Γ** ἥμισύ ἐστιν ὁ **Β**· ὁ **Δ** ἄρα τὸν **Β** μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν **Α**. ὁ **Δ** ἄρα τοὺς **Α**, **Β** μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

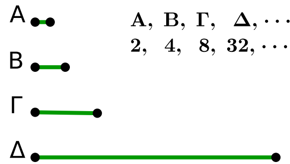


οὐκ ἄρα ὁ **Α** πρὸς τὸν **Γ** πρῶτος οὔκ ἐστιν. οἱ **Α**, **Γ** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ΄.

Τῶν ἀπὸ δύαδος διπλασιαζομένων ἀριθμων ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δύαδος τῆς **Α** δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ **Β**, **Γ**, **Δ**· λέγω, ὅτι οἱ **Β**, **Γ**, **Δ** ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.



Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος [τῶν **Β**, **Γ**, **Δ**] ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιασθείς. λέγω, ὅτι καὶ μόνον. ἐκκείσθω γὰρ μονάς. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ **Α** πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** ὁ **Δ** ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**. καί ἐστιν ἕκαστος τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἄρτιος· ὁ **Δ** ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι [καὶ] ἑκάτερος τῶν **Β**, **Γ** ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **Α** τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω, ὅτι ὁ **Α** ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.



Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστιν, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις, λέγω δή, ὅτι καὶ μόνον.

εἰ γὰρ ἔσται ὁ **Α** καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ὤν· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ὁ **Α** ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ **Α** μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἔστω μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω, ὅτι ὁ **Α** ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισσός.

$$\mathrm{A} \neq 2^n, \frac{\mathrm{A}}{2} \neq 2 \cdot k + 1$$
$$\mathrm{A} = 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

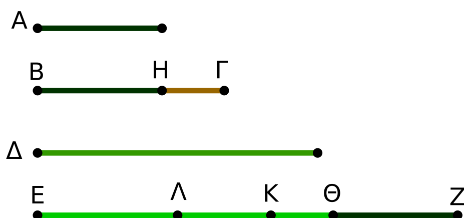
Α

Ὅτι μὲν οὖν ὁ **Α** ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δή, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐὰν γὰρ τὸν **Α** τέμνωμεν δίχα καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα ἀριθμὸν περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν **Α** κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

εἰ γὰρ οὔ, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ **Α** τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὥστε ὁ **Α** ἀρτιάκις περισσόν ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. ὁ **Α** ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ, ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.



Ἔστωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ **Α**, **ΒΓ**, **Δ**, **ΕΖ** ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ **Α**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ **ΒΓ** καὶ τοῦ **ΕΖ** τῷ **Α** ἴσος ἑκάτερος τῶν **ΒΗ**, **ΖΘ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **ΗΓ** πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **ΕΘ** πρὸς τοὺς **Α**, **ΒΓ**, **Δ**.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν **ΒΓ** ἴσος ὁ **ΖΚ**, τῷ δὲ **Δ** ἴσος ὁ **ΖΛ**. καὶ ἐπεὶ ὁ **ΖΚ** τῷ **ΒΓ** ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ **ΖΘ** τῷ **ΒΗ** ἴσος ἐστίν, λοιπὸς ἄρα ὁ **ΘΚ** λοιπῷ τῷ **ΗΓ** ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ **ΕΖ** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Δ** πρὸς τὸν **ΒΓ** καὶ ὁ **ΒΓ** πρὸς τὸν **Α**, ἴσος δὲ ὁ μὲν **Δ** τῷ **ΖΛ**, ὁ δὲ **ΒΓ** τῷ **ΖΚ**, ὁ δὲ **Α** τῷ **ΖΘ**, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΕΖ** πρὸς τὸν **ΖΛ**, οὕτως ὁ **ΛΖ** πρὸς τὸν **ΖΚ** καὶ ὁ **ΖΚ** πρὸς τὸν **ΖΘ**.

διελόντι, ὡς ὁ **ΕΛ** πρὸς τὸν **ΛΖ**, οὕτως ὁ **ΛΚ** πρὸς τὸν **ΖΚ** καὶ ὁ **ΚΘ** πρὸς τὸν **ΖΘ**. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΚΘ** πρὸς τὸν **ΖΘ**, οὕτως οἱ **ΕΛ**, **ΛΚ**, **ΚΘ** πρὸς τοὺς **ΛΖ**, **ΖΚ**, **ΘΖ**.

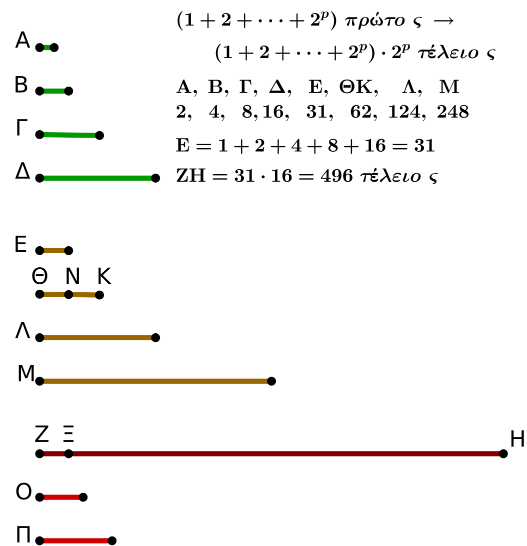
ἴσος δὲ ὁ μὲν **ΚΘ** τῷ **ΓΗ**, ὁ δὲ **ΖΘ** τῷ **Α**, οἱ δὲ **ΛΖ**, **ΖΚ**, **ΘΖ** τοὶς **Δ**, **ΒΓ**, **Α**· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΓΗ** πρὸς τὸν **Α**, οὕτως ὁ **ΕΘ** πρὸς τοὺς **Δ**, **ΒΓ**, **Α**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ **Ε**, καὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **ΖΗ** ποιείτω. λέγω, ὅτι ὁ **ΖΗ** τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** τῷ πλήθει, τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ **Ε** εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ οἱ **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**, **Μ**· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Α** πρὸς τὸν **Δ**, οὕτως ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Μ**. ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Ε**, **Δ** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Α**, **Μ**.



καί ἐστιν ὁ ἐκ τῶν **Ε**, **Δ** ὁ **ΖΗ**· καὶ ὁ ἐκ τῶν **Α**, **Μ** ἄρα ἐστὶν ὁ **ΖΗ**. ὁ **Α** ἄρα τὸν **Μ** πολλαπλασιάσας τὸν **ΖΗ** πεποίηκεν· ὁ **Μ** ἄρα τὸν **ΖΗ** μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ **Α** μονάδας. καί ἐστι δυὰς ὁ **Α**· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ **ΖΗ** τοῦ **Μ**. εἰσὶ δὲ καὶ οἱ **Μ**, **Λ**, **ΘΚ**, **Ε** ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων· οἱ **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**, **Μ**, **ΖΗ** ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ.

ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ **ΘΚ** καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ **ΖΗ** τῷ πρώτῳ τῷ **Ε** ἴσος ἑκάτερος τῶν **ΘΝ**, **ΖΞ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου

ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΝΚ** πρὸς τὸν **Ε**, οὕτως ὁ **ΞΗ** πρὸς τοὺς **Μ**, **Λ**, **ΚΘ**, **Ε**. καί ἐστιν ὁ **ΝΚ** ἴσος τῷ **Ε**· καὶ ὁ **ΞΗ** ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς **Μ**, **Λ**, **ΘΚ**, **Ε**. ἔστι δὲ καὶ ὁ **ΖΞ** τῷ **Ε** ἴσος, ὁ δὲ **Ε** τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** καὶ τῇ μονάδι. ὅλος ἄρα ὁ **ΖΗ** ἴσος ἐστὶ τοῖς τε **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**, **Μ** καὶ τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** καὶ τῇ μονάδι· καὶ μετρεῖται ὑπ᾽ αὐτῶν.

λέγω, ὅτι καὶ ὁ **ΖΗ** ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**, **Μ** καὶ τῆς μονάδος.

εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τις τὸν **ΖΗ** ὁ **Ο**, καὶ ὁ **Ο** μηδενὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**, **Μ** ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ὁσάκις ὁ **Ο** τὸν **ΖΗ** μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ **Π**· ὁ **Π** ἄρα τὸν **Ο** πολλαπλασιάσας τὸν **ΖΗ** πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ **Ε** τὸν **Δ** πολλαπλασιάσας τὸν **ΖΗ** πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Π**, ὁ **Ο** πρὸς τὸν **Δ**. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, ὁ **Δ** ἄρα ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**. καὶ ὑπόκειται ὁ **Ο** οὐδενὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ **Ο** τὸν **Δ**.

ἀλλ᾽ ὡς ὁ **Ο** πρὸς τὸν **Δ**, ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Π**· οὐδὲ ὁ **Ε** ἄρα τὸν **Π** μετρεῖ. καί ἐστιν ὁ **Ε** πρῶτος· πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός [ἐστιν]. οἱ **Ε**, **Π** ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· καί ἐστιν ὡς ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Π**, ὁ **Ο** πρὸς τὸν **Δ**. ἰσάκις ἄρα ὁ **Ε** τὸν **Ο** μετρεῖ καὶ ὁ **Π** τὸν **Δ**.

ὁ δὲ **Δ** ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται παρὲξ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**· ὁ **Π** ἄρα ἑνὶ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** ἐστιν ὁ αὐτός. ἔστω τῷ **Β** ὁ αὐτός. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ **Β**, **Γ**, **Δ** τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ **Ε** οἱ **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**. καί εἰσιν οἱ **Ε**, **ΘΚ**, **Λ** τοῖς **Β**, **Γ**, **Δ** ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **Β** πρὸς τὸν **Δ**, ὁ **Ε** πρὸς τὸν **Λ**.

ὁ ἄρα ἐκ τῶν **Β**, **Λ** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Δ**, **Ε**· ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν **Δ**, **Ε** ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Π**, **Ο**· καὶ ὁ ἐκ τῶν **Π**, **Ο** ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν **Β**, **Λ**. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **Π** πρὸς τὸν **Β**, ὁ **Λ** πρὸς τὸν **Ο**. καί ἐστιν ὁ **Π** τῷ **Β** ὁ αὐτός· καὶ ὁ **Λ** ἄρα τῳ **Ο** ἐστιν ὁ αὐτός· ὅπερ ἀδύνατον· ὁ γὰρ **Ο** ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν **ΖΗ** μετρήσει τις ἀριθμὸς παρὲξ τῶν **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**, **Μ** καὶ τῆς μονάδος. καὶ ἐδείχη ὁ **ΖΗ** τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, **ΘΚ**, **Λ**, **Μ** καὶ τῇ μονάδι ἴσος. τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ **ΖΗ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ISBN 978-618-83039-1-1
ISBN 978-618-83039-4-2 (set)